PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2.006-2.007 - CONVOCATORIA:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5

Prueba A

1.- El departamento de extranjería detecta, en un control realizado a 169 inmigrantes, que 60 no tienen permiso de residencia.

a) Con un nivel de confianza del 99%, construir un intervalo de confianza para la proporción de inmigrantes que tienen permiso de residencia.

b) Con un nivel de significación del 5%, ¿se puede aceptar la hipótesis de que la proporción de inmigrantes que carecen de permiso de residencia es, a lo sumo, del 25%?

Solución

a) El intervalo de confianza es:

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Como $\hat{p} = \frac{109}{169} = 0.6449$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$, el intervalo es igual a:

$$\left[\frac{109}{169} - 2.575\sqrt{\frac{6540}{169^3}}, \frac{109}{169} + 2.575\sqrt{\frac{6540}{169^3}}\right] = [0.55011, 0.73968]$$

b) Tenemos que resolver el siguiente contraste:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \le 0.25 = p_0 \\ H_1 : p > 0.25 \end{array}\right\} \quad n = 169;\ \hat{p} = \frac{60}{169} = 0.355; \quad \alpha = 0.05;\ z_{0.05} = 1.645$$

Región crítica:

$$\left\{\hat{p} > p_0 + z_{\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right\} = \left\{\hat{p} > 0.25 + 1.645\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{169}}\right\} = \{\hat{p} > 30479\}.$$

Como $\hat{p} > 0.30479$, no se acepta H_0.

2.- Con una desviación típica de 5 €, el precio medio de un menú en 64 restaurantes de una determinada región es de 20 €.

a) Hallar un intervalo de confianza, de nivel igual a 0.95, para la media del precio de un menú en los restaurantes de la región citada.

b) ¿Cuántos restaurantes se deben considerar para estimar la media del precio de un menú con una confianza del 99% y un error menor de 1 €?

Solución

a) Como $\overline{x} = 20, \sigma = 5, n = 64, \alpha = 0.05, z_{\alpha/2} = 1.96$, el intervalo de confianza es

$$\left[\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[20-1.96\frac{5}{\sqrt{64}},\ 20+1.96\frac{5}{\sqrt{64}}\right]=[18.775,\ 21.225]$$

b) $z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<E\Rightarrow 2.575\frac{5}{\sqrt{n}}<1,\ \left(2.575\frac{5}{1}\right)^2<n\Rightarrow n>165.76\Rightarrow n\geq 166$

3.- El nivel de las emisiones de gases contaminantes, en toneladas, en una gran industria durante las 10 horas de actividad, viene dado por la expresión $n(t)=\frac{t}{8}(20-2t)$, siendo t el tiempo en horas, $0\leq t\leq 10$.

a) ¿Cuál es el nivel máximo?¿Cuándo se produce? ¿En qué intervalos aumenta o disminuye dicho nivel?

b) ¿En qué momentos el nivel es de cuatro toneladas?

Solución

a) Si $n'(t)=\frac{20-2t}{8}-2\frac{t}{8}=0$, entonces $t=5$. Como $n''(5)=-\frac{1}{2}$, en $t=5$ existe un máximo.

El nivel máximo es $n(5)=\frac{25}{4}$ toneladas. El nivel aumenta en el intervalo $]0,5[$ y disminuye en el intervalo $]5,10[$.

b) Si $4=\frac{t}{8}(20-2t)$, entonces $2t^2-20t+32=0$, es decir $t=\frac{20\pm\sqrt{400-256}}{4}=\frac{20\pm 12}{4}$.

Por tanto, $t=2$ y $t=8$.

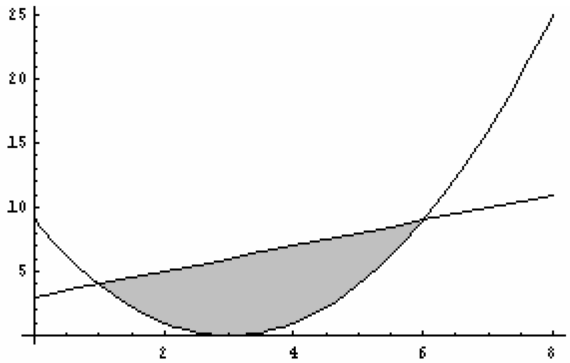
4.- Se quiere regar una parcela de jardín limitada por $y=(x-3)^2$ e $y=x+3$. Si se mide en metros y cada metro cuadrado debe recibir 12 litros de agua,

a) Representa la parcela.

b) ¿Cuántos litros de agua hay que utilizar?

Solución

a)



b) Si $x^2-6x+9=x+3$, entonces $x^2-7x+6=0$. Por ello, $x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}$; es decir $x=1$ y $x=6$.

La superficie de la parcela es

$$S=\int_1^6\left(x+3-(x-3)^2\right)dx=\int_1^6\left(-x^2+7x-6\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-6x\right]_1^6=\frac{125}{6}\ m^2$$

La cantidad de agua necesaria es igual a $\frac{125}{6}\cdot 12=250$ litros.

5.- Un comercio tiene un total de 270 unidades de productos de tres tipos: A, B y C. Del tipo A tiene 30 unidades menos que de la totalidad de B más C y del tipo C tiene el 35% de la suma de A más B. ¿Cuántos productos de cada tipo hay en el comercio?

Solución

El sistema es:

$$A+B+C=270$$
$$B+C-30=A \quad ,$$
$$C=0.35(A+B)$$

La solución es $A=120$, $B=80$, $C=70$

Prueba B

1. Cinco de cada veinte aparatos electrónicos de un determinado tipo, tienen alguna avería dentro del periodo de garantía de 2 años. Un comercio vende 120 de esos aparatos:

a) ¿Cuál es el número esperado de aparatos que se averiarán en el periodo de garantía?
b) Hallar la probabilidad de que el número de aparatos averiados esté entre 25 y 40.
c) Hallar la probabilidad de que el número de aparatos no averiados sea inferior a 80.

Solución

a) Número esperado $120\dfrac{5}{20}=30$

b) El número de aparatos averiados, *X*, es una variable $Bi\left(120,\dfrac{1}{4}\right)$

Como $n>30$, $np>5$ y $n(1-p)>5$, $X \sim Bi\left(120,\dfrac{1}{4}\right) \sim N\left(30,\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\right)=N(30,4.7434)$

$$p(25<X<40)=p\left(\frac{-5}{4.7434}<Z<\frac{10}{4.7434}\right)=p(-1.05<Z<2.11)=0.9826-(1-0.8531)=0.8357$$

c) El número de aparatos no averiados, *Y*, es una variable $Bi\left(120,\dfrac{3}{4}\right)$

Como $n>30$, $np>5$ y $n(1-p)>5$, $Y \sim Bi\left(120,\dfrac{3}{4}\right) \sim N\left(90,\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\right)=N(90,4.7434)$

$$p(Y<80)=p(Z<-2.11)=0.0174$$

2.- Se afirma que el precio medio de la compra en un hipermercado, durante los comienzos de mes, es, a lo sumo, de 155 € con una desviación típica de 20 €. Para contrastar lo anterior, se elige una muestra de 81 compras y se obtiene que el precio medio es igual a 165€. Suponiendo que el precio de la compra sigue una distribución normal:

a) Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la hipótesis inicial?
b) A partir de los datos muestrales y con una confianza del 90%, ¿cuál es el error máximo al estimar el precio medio de la compra?

Solución

Si *X* representa el precio de la compra, $X \sim N(\mu,20)$

El contraste que hay que plantear es:

$$H_0:\mu\le 155=\mu_0$$
$$H_1:\mu>155$$

a) Región crítica: $\left\{\overline{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{\overline{x} > 155 + 2.32\frac{20}{\sqrt{81}}\right\} = \{\overline{x} > 160.15\}$. Como $\overline{x} = 165$, se rechaza H_0.

b) Error $= \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = 1.645\frac{20}{9} = 3.65$

3.- En un barrio de una gran ciudad se inspeccionan 121 viviendas detectando que 22 están deshabitadas.

a) Obtener un intervalo de confianza para la proporción de viviendas habitadas en dicho barrio con un nivel de confianza del 90% .
b) Con un nivel de significación del 5% ,¿se puede aceptar la hipótesis de que la proporción de viviendas deshabitadas en el barrio es, a lo sumo, del 15%?

Solución

a) $\hat{p} = \frac{99}{121} = \frac{9}{11} = 0.8181$, $\alpha = 0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645$

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] = \left[0.8181 - 1.645\sqrt{\frac{\frac{2}{11}\cdot\frac{9}{11}}{121}}, 0.8181 + 1.645\sqrt{\frac{\frac{18}{121}}{121}}\right] = [0.7604, 0.8757]$$

b) Planteamos el siguiente contraste:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \le 0.15 = p_0 \\ H_1 : p > 0.15 \end{array}\right\} \quad n = 121;\ \hat{p} = \frac{2}{11} = 0.1818;\quad \alpha = 0.05;\ z_{0.05} = 1.645$$

Región crítica:

$$\left\{\hat{p} > p_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right\} = \left\{\hat{p} > 0.15 + 1.645\sqrt{\frac{\frac{18}{121}}{121}}\right\} = \{\hat{p} > 0.20767\}.$$

Como $\hat{p} < 0.20767$, se acepta H_0.

4.- Los beneficios (en millones de euros) generados por el funcionamiento de una industria vienen dados en función del tiempo (en años) por: $b(t) = \frac{2t}{1+t^2}$

a) ¿Cuándo los beneficios son de un millón de euros?
b) ¿Cuándo los beneficios son máximos? ¿Cuándo crecen y cuando decrecen?
c) ¿Qué ocurre cuando pasan muchos años?

Solución

a) Si $\frac{2t}{1+t^2} = 1$, $t^2 - 2t + 1 = 0$, $t = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$

b) $b'(t) = \frac{2(1+t^2) - 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} = 0$, $t = 1$ es un máximo ya que:

$$b''(t) = \frac{-4t(1+t^2)^2 - 4t(1+t^2)(2-2t^2)}{(1+t^2)^2} < 0 \text{ cuando } t = 1.$$

Los beneficios crecen entre 0 y 1 y decrecen a partir de 1.

c) $\lim_{t\to\infty} \frac{2t}{1+t^2} = 0$, es decir cuando pasan muchos años los beneficios tienden a cero.

5.- Dos compuestos medicinales tienen dos principios activos A y B. Por cada píldora, el primer compuesto tiene 2 unidades de A y 6 de B, mientras que el segundo compuesto tiene 4 unidades de A y 4 unidades de B. Durante un periodo de tiempo, un paciente debe recibir un mínimo de 16 unidades tipo A y un mínimo de 24 unidades tipo B. Si el coste de cada píldora del primer compuesto es de 0,50 € y el coste de cada píldora del segundo compuesto es de 0,90 €:

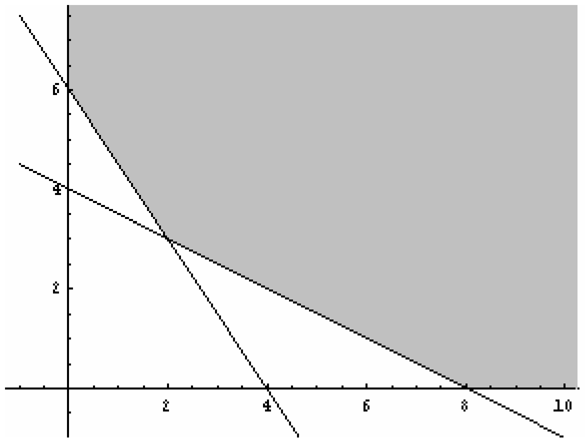
a) Representar la región factible
b) Calcular el número óptimo de píldoras de cada compuesto que debe recibir el paciente para minimizar los costos.

Solución

Se plantea el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\min\ 0.5x_1 + 0.9x_2 \\ &s.a:\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ &\quad\ \ 6x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ &\quad\ \ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Región factible no acotada.



Vértices: (8,0), (0,6) y (2,3).

Solución óptima: (2,3).

Valor óptimo: 3.7