PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD (L.O.G.S.E.)

CURSO 2008 – 2009 CONVOCATORIA:

MATERIA: MATEMÁTICAS II (criterios de calificación)

EXAMEN Nº 2

1A. Obtener los puntos de la curva $y = x^3 - 3x^2 + 15$ donde la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (0 , -12) y (1 , 12). **(2'5 puntos)**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

Cálculo de $f'(x)$ **(0'25 puntos)**

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos en el plano (o expresión de la pendiente de dicha recta en función de las coordenadas de los puntos) **(0'25 puntos)**

Cálculo de la pendiente de la recta dada, que es 24 **(0'25 puntos)**

Igualación de $f'(x)$ con 24 **(0'25 puntos)**

Justificación de lo anterior (rectas paralelas tienen la misma pendiente) **(0'25 puntos)**

Resolver ecuación $f'(x) = 24$ **(0'25 puntos)**

Concluir que los puntos buscados tienen abscisas $x = 4$ y $x = -2$ **(0'25 puntos)**

Cálculo de $f(4)$ **(0'25 puntos)**

Cálculo de $f(-2)$ **(0'25 puntos)**

Dar ambos puntos con sus dos coordenadas **(0'25 puntos)**

1B. Obtener dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como máximos y mínimos de la función $y = \dfrac{x^2 + 8}{x^2 - 4}$ **(2'5 puntos)**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

Determinación del dominio **(0'25 puntos)**

Cálculo de la derivada **(0'25 puntos)**

Cálculo de puntos críticos (sólo resulta $x = 0$) **(0’25 puntos)**

Determinación de los intervalos para estudiar monotonía (4 intervalos) **(0’25 puntos)**

Valor positivo de $f'(x)$ en un punto de $(-\infty\,,\,-2)$ $\Rightarrow$ La función es creciente en ese intervalo **(0’25 puntos)**

Valor positivo de $f'(x)$ en un punto de (-2 , 0) $\Rightarrow$ La función es creciente en ese intervalo **(0’25 puntos)**

Valor negativo de $f'(x)$ en un punto de (0 , 2) $\Rightarrow$ La función es decreciente en ese intervalo **(0’25 puntos)**

Valor negativo de $f'(x)$ en un punto de $(2\,,+\infty)$ $\Rightarrow$ La función es decreciente en ese intervalo **(0’25 puntos)**

En $x = 0$ la función posee un máximo **(0’25 puntos)**

Justificación de lo anterior **(0’25 puntos)**

2A. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 4 - x^2$, la recta $8x + 2y = 16$ y la recta $y = 4x + 8$. **(2’5 puntos)**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

Representar la parábola **(0’25 puntos)**

Representar las rectas **(0’25+0’25 puntos)**

Determinar el recinto limitado por las tres gráficas obtenidas **(0’25 puntos)**

Expresar, al menos, una de las rectas dadas en forma explícita **(0’25 puntos)**

Expresar el área del recinto mediante una sola integral (usando la simetría respecto al eje OY) o como suma de dos integrales **(0’5 puntos)**

Regla de Barrow (indicada) para la integral (o las integrales) anteriores **(0’5 puntos la primitiva perfecta; 0’25 puntos si hay algún pequeño error)**

Cálculo final **(0’25 puntos)**

2B. Calcular las siguientes integrales: **i)** $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$ **(1’25 puntos)**

ii) $\int x^2 \cdot e^{3x}\, dx$ **(1’25 puntos)**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

Para la primera parte:

Descomponer el integrando en dos fracciones simples, sin determinar las constantes **(0'25 puntos)**

Identidad de polinomios que permite calcular las constantes anteriores **(0'25 puntos)**

Obtener valores de dichas constantes **(0'25 puntos)**

Acabar la integral **(0'25+0'25 puntos)**

Para la segunda parte:

Primera integración por partes **(0'25 puntos, elección de u y dv y cálculo de du y v; 0'25 puntos, aplicar correctamente fórmula de integración por partes)**

Segunda integración por partes **(0'25+0'25 puntos, como antes)**

Resultado final **(0'25 puntos)**

3A. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

i) Hallar las matrices A y B que verifican el sistema: $\begin{cases} 2A + B = M \\ A - 3B = N \end{cases}$ **(1'5 puntos)**

ii) Calcular $M^{-1} \cdot N^t$ **(1 punto)**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

Para la primera parte:

Multiplicar la segunda ecuación por -2 (calculando matriz $-2N$) **(0'25 puntos)**

Sumar miembro a miembro las ecuaciones (calculando $M - 2N$) **(0'25 puntos)**

Obtener matriz B **(0'25 puntos)**

Expresión de A en función de B **(0'25 puntos)**

Cálculo de $3B$ **(0'25 puntos)**

Obtener matriz A **(0'25 puntos)**

Para la segunda parte:

Fórmula de la inversa (explícita o al usarla) **(0'25 puntos)**

Cálculo de M^{-1} **(0’25 puntos)**

Escribir N^t **(0’25 puntos)**

Efectuar el producto de matrices **(0’25 puntos)**

3B. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro k: $\begin{cases} x + ky + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ kx + y + z = 4 \end{cases}$

(2’5 puntos)

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

Cálculo del determinante de los coeficientes **(0’25 puntos)**

Igualación a cero del determinante anterior y resolver ecuación ($k = -1$ y $k = 2$) **(0’25 puntos)**

Establecer que para k distinto de -1 y de 2 el sistema es compatible determinado, por el Teorema de Rouché o por el Teorema de Cramer **(0’25 puntos)**

Escribir la matriz de los coeficientes A para $k = -1$ y localizar en ésta un menor de orden 2 distinto de cero, con lo cual su rango es 2 **(0’25 puntos)**

Escribir la matriz ampliada A^* para $k = -1$ y comprobar que es distinto de cero el menor de orden 3, “orlado” del menor de orden 2 no nulo que teníamos, que incluye la columna de términos independientes **(0’25 puntos)**

Concluir que el rango de A^* (para $k = -1$) es 3 **(0’25 puntos)**

Establecer que, en virtud del Teorema de Rouché, el sistema es incompatible para $k = -1$ **(0’25 puntos)**

Escribir la matriz de los coeficientes A para $k = 2$ y localizar en ésta un menor de orden 2 distinto de cero, con lo cual su rango es 2 **(0’25 puntos)**

Escribir la matriz ampliada A^* para $k = 2$ y comprobar que valen cero los dos menores de orden 3, “orlados” del menor de orden 2 no nulo que teníamos (uno es $|A|$ y el otro tiene dos columnas iguales u opuestas) **(0’25 puntos)**

Concluir que el rango de A^* (para $k = 2$) es 2 y entonces el sistema es compatible indeterminado **(0’25 puntos)**

4A. Calcular ecuación del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} y=1+x \\ z=2 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-2 \quad (\lambda\in R) \\ z=\lambda \end{cases}$ **(2'5 puntos)**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

Establecer que dos planos que contienen a la recta r son $x-y+1=0$ y $z-2=0$ **(0'25 puntos)**

Establecer que $\alpha\cdot(x-y+1)+\beta\cdot(z-2)=0$ es la ecuación de todos los planos que contienen a la recta r **(0'25 puntos)**

Escribir ordenadamente la ecuación anterior **(0'25 puntos)**

Escribir el vector normal $\vec{n}$ de cualquiera de los planos anteriores **(0'25 puntos)**

Establecer que el plano (de los anteriores) que sea paralelo a la recta s debe tener su vector normal perpendicular al vector director de dicha recta **(0'25 puntos)**

Determinar vector director $\vec{v}$ de la recta s **(0'25 puntos)**

Establecer que el producto escalar de $\vec{n}$ por $\vec{v}$ de cero **(0'25 puntos)**

Despejar β en función de α (o viceversa) **(0'25 puntos)**

Sustituir valor obtenido del parámetro despejado en la ecuación de todos los planos que contienen a la recta r **(0'25 puntos)**

Simplificar la ecuación obtenida **(0'25 puntos)**

4B. Dado el plano $\pi: 3x-2y+z=5$ y la recta $r:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=z+3$, hallar su posición relativa. Si se cortan en un punto, hallar sus coordenadas. Y si son paralelos, hallar el plano que contenga a r y sea paralelo a π. **(2'5 puntos)**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

Escribir vector normal $\vec{n}$ del plano π **(0'25 puntos)**

Escribir vector director $\vec{v}$ de la recta r **(0'25 puntos)**

Establecer que si la recta fuese paralela al plano o estuviese contenida en el mismo, sería $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ **(0’25 puntos)**

Cálculo de $\vec{n} \cdot \vec{v}$ **(0’25 puntos)**

Al ver que el producto anterior da 11, concluir que la recta r corta al plano π en un punto **(0’25 puntos)**

Escribir las ecuaciones paramétricas de r que se deducen de las ecuaciones dadas en forma continua **(0’25 puntos)**

Sustituir el punto genérico de la recta r, dado por sus ecuaciones paramétricas, en la ecuación del plano π **(0’25 puntos)**

Despejar el valor de λ en la ecuación anterior **(0’25 puntos)**

Concluir que el punto de corte entre recta y plano es el que corresponde a ese valor de λ obtenido **(0’25 puntos)**

Obtener las coordenadas del punto **(0’25 puntos)**