PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD L.O.G.S.E

CURSO 1999-2.000 - CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5

PRUEBA A

1.- La probabilidad de que un alumno matriculado en 2º Curso de Bachillerato abandone los estudios es de 0,2. Si en un centro hay 100 alumnos de ese nivel, se pide:

a) ¿De qué distribución se trata?. ¿Qué condición debe cumplir para que se pueda aproximar a una continua?.

X="nº de alumnos, de los 100 matriculados, que abandonan los estudios"

Se trata de una binomial de parámetros n=10*0,* alumnos, y p=0.2, la probabilidad de que cada una de ellos abandone los estudios, es decir, $X \approx B(100\ ,\ 0,2)$

Las condiciones para que una binomial se pueda aproximar por una normal, $N\left(n\cdot p, \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\right)$, son

i) n·p=100·0,2=20>5
ii) n(1-p)=100·0,8=80>5

en este caso se cumplen, por tanto la variable *X,* se puede aproximar por la variable $Y \approx N\left(100\cdot 0.2, \sqrt{100\cdot 0.2\cdot 0.8}\right) = N\left(20, 4\right)$

b) Hallar la probabilidad de que abandonen menos de 30 alumnos.

$$P(X<30) \cong P(Y<30) = P\left(\frac{Y-20}{4} < \frac{30-20}{4}\right) = P\left(Z<2.5\right) = 1 - P(Z>2.5) = 1 - 0.0062 = 0.9938$$

<u>Observación:</u> Para ser más exactos en la respuesta teniendo en cuenta que una variable binomial es discreta, al aproximarla por una variable continua , se le debe hacer la Corrección de Yates, es decir, $P(X<30) = P(X \le 29) \cong P(Y \le 29.5)$

$$P(Y \le 29.5) = P\left(\frac{Y-20}{4} < \frac{29.5-20}{4}\right) = P\left(Z<2.375\right) = 1 - P(Z>2.375) = 1 - 0.0088 = 0.9912$$

c) Halla la probabilidad de que abandonen entre 10 y 20 alumnos.

Nos piden la probabilidad $P(10 \le X \le 20)$

Sin hacer la Corrección de Yates sería

$$P(10 \le X \le 20) \cong P(10 \le Y \le 20) = P\left(\frac{10-20}{4} < \frac{Y-20}{4} < \frac{20-20}{4}\right) = \left(-2,54 < Z < 0\right) =$$
$$= P\left(Z < 0\right) - P\left(Z < -2.5\right) = P\left(Z < 0\right) - P\left(Z > 2.5\right) = 0,5 - 0,0062 = 0,4938$$

Si hacemos la Corrección de Yates sería

$P(10 \le X \le 20) \cong P(9.5 \le Y \le 20.5)$

$$P(9.5 \le Y \le 20.5) = P\left(\frac{9.5-20}{4} < \frac{Y-20}{4} > \frac{20.5-20}{4}\right) = P\left(-2,625 < Z < 0.125\right) =$$
$$= 1 - P\left(Z < -2.625\right) - P\left(Z > 0.125\right) = 1 - P\left(Z > 2.625\right) - P\left(Z > 0.125\right) =$$
$$= 1 - 0.0044 - 0.4110 = 0.5846$$

En este caso aplicar la corrección de Yates produce una diferencia de aproximadamente 7 centésimas.

2.- Un sociólogo está estudiando la duración del noviazgo en una extensa área rural. Se tomó una muestra aleatoria formada por 56 familias y se obtuvo que la duración media fue de 3,4 años, con una desviación típica de 1,2 años.

a) Halla el intervalo de confianza, para la duración media del noviazgo, de la población de familias en dicha área al nivel de confianza del 95%.

El intervalo de confianza para una media muestral es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Datos del problema:

$$n = 56;\ \overline{x} = 3,4;\quad \sigma = 1,2;\ \alpha = 0,05;\ \alpha/2 = 0,025;\ z_{0,025} = 1,96$$

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3,4 - 1,96\frac{1,2}{\sqrt{56}}\ ,\ 3,4 + 1,96\frac{1,2}{\sqrt{56}}\right) = \left(3.085\ ,\ 3.714\right)$$

b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para estar seguro al nivel confianza del 90% de que el error máximo cometido es del 5%?

Datos del problema:

$$\sigma = 1,2;\quad E = 0.05;\quad \alpha = 0,1;\ \alpha/2 = 0,05;\ z_{0,05} = 1,64$$

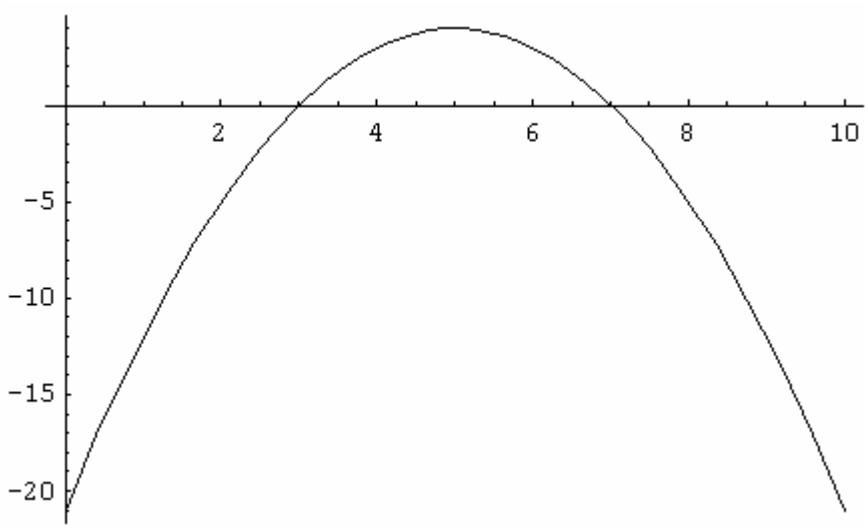
$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < E \Rightarrow z_{0,05}\frac{1.2}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow 1.64\frac{1.2}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1.968}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow \frac{1.968}{0.05} < \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} > 39.36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > 1549.21 \Rightarrow n \geq 1550$$

3.- Una empresa de bebidas refrescantes sabe que, si x es el precio (en décimas de euros) de una botella de refresco, los beneficios de la empresa (en miles de euros) vienen dados por la expresión $b(x) = 10x - x^2 - 21$. Se pide:

a) ¿Entre qué valores de x el beneficio es positivo?



Las raíces de la ecuación $b(x) = 0$ son 3 y 7, entre ellas la función es positiva.

b) ¿Cuál es el precio de la botella que da el beneficio máximo.

Tenemos que derivar e igualar a cero la función de beneficios $b(x) = 10x - x^2 - 21$

$b'(x) = 10 - 2x \Rightarrow b'(x) = 0 \Rightarrow 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$

$b''(x) = -2$, quiere decir que en $x = 5$ hay un máximo.

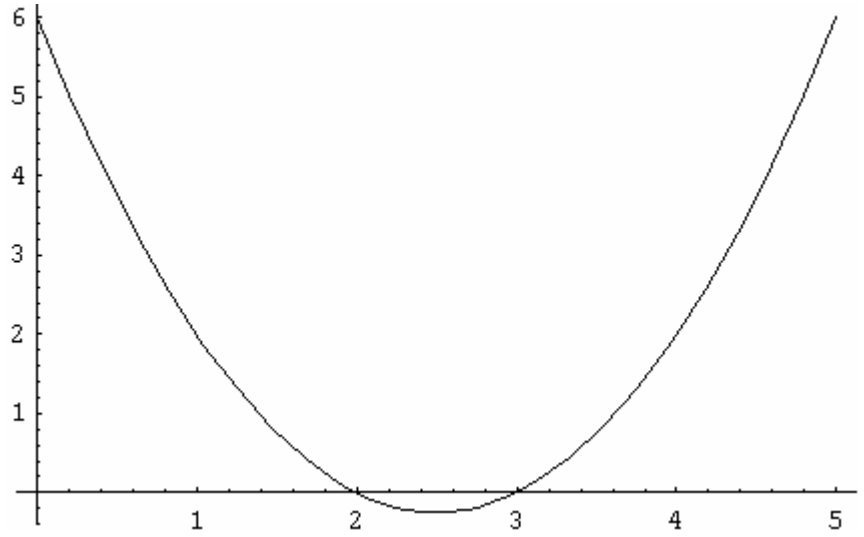
c) ¿Cuál es ese beneficio?.

Para el precio de 5 décimas de euros (0,5 euros) el beneficio es

$b(5) = 10 \cdot 5 - 5^2 - 21 = 4$

Cuando el precio es 0,5 euros el beneficio es 4000 euros

4.- Hacer un esquema de la gráfica de la función f(x) = x^2–5x+6 calculando sus máximos y mínimos relativos y los puntos de cortes con los ejes. Halla el área de la región comprendida entre la curva anterior el eje de las abscisas y las rectas x=1 y x=5.



La función *f* esta definida en todo ¡ . Sus cortes con los ejes se obtienen de:

i) Resolver la ecuación $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

ii) Evaluar $f(0) = 6$

Con lo cual son los puntos (2,0), (3,0) y (0,6).

Para estudiar sus máximos y mínimos tenemos que derivar e igualar a cero la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 2.5$

$f''(x) = 2$, quiere decir que en $x = 2.5$ hay un máximo absoluto.

f no tiene máximos ni mínimos relativos.

El área de la región comprendida entre la curva, el eje de las abscisas y las rectas x=1 y x=5, se tiene que tener en cuenta que la función es negativa entre 2 y 3.

El área se obtiene de la siguiente forma:

$$Area = \int_1^2 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6\cdot x\right)\Bigg]_1^2 - \left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6\cdot x\right)\Bigg]_2^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6\cdot x\right)\Bigg]_3^5 =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - 5\frac{2^2}{2} + 6\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 5\frac{1^2}{2} + 6\cdot 1\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 5\frac{3^2}{2} + 6\cdot 3\right) +$$

$$+ \left(\frac{2^3}{3} - 5\frac{2^2}{2} + 6\cdot 2\right) + \left(\frac{5^3}{3} - 5\frac{5^2}{2} + 6\cdot 5\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 5\frac{3^2}{2} + 6\cdot 3\right) =$$

$$= \frac{14}{3} - \frac{23}{6} - \frac{9}{2} + \frac{14}{3} + \frac{55}{6} - \frac{9}{2} = \frac{17}{3} = 5.667$$

5- En un supermercado un cliente compra 12 latas de aceitunas de un total de tres marcas distintas. Si el número de latas de la marca A es igual a 3/2 el número de latas de la marca B, y éste, a su vez, es igual a dos veces el número de latas de la marca C. Se pide:

a) ¿En qué parte del programa de matemáticas, que has dado, ubicas este problema?

Este problema pertenece al tema de sistemas de ecuaciones lineales, ya que se describen una serie de "relaciones" entre unas cantidades desconocidas. Estas relaciones una vez se plasman como ecuaciones se observa que son lineales.

b) ¿Cuántas latas compró de cada marca?

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=12 \\ A=\frac{3}{2}B \\ B=2C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}A=12 \\ B=\frac{2}{3}A \\ C=\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}A=\frac{1}{3}A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2A=12 \\ B=\frac{2}{3}A \\ C=\frac{1}{3}A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=6 \\ B=4 \\ C=2 \end{array}\right\}$$

PRUEBA B

1.- El nivel medio de colesterol en sangre de la población adulta entre 50 y 60 años de edad es de 185 mg por cada 100 ml de sangre. La desviación típica es de 25 mg por 100 ml. Si las medidas se distribuyen según una normal, calcula:

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene niveles superiores a 200 mg?

$X =$ " Nivel de colesterol en sangre en un adulto entre 50 y 60 años";

$X \approx N(185, 25)$

La probabilidad de que una persona tenga un nivel de colesterol en sangre superior a 200 es:

$$P(X > 200) = P\left(\frac{X-185}{25} > \frac{200-185}{25}\right) = P(Z > 0.6) = 0,2743$$

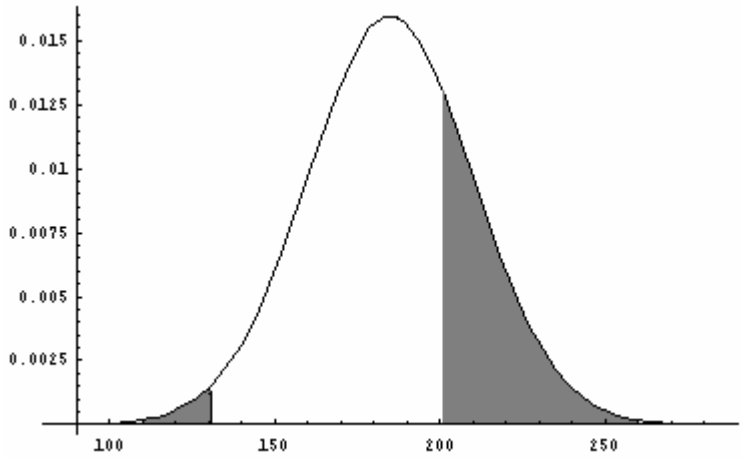
Quiere decir esto que el 27.43% de la población adulta entre 50 y 60 años tiene un nivel de colesterol en sangre superior a 200 mg.

b) ¿Qué porcentaje de la población tiene niveles inferiores a 130 mg?

$$P(X < 130) = P\left(\frac{X-185}{25} < \frac{130-185}{25}\right) = P(Z < -2.2) = P(Z > 2.2) = 0,0139$$

Quiere decir esto que el 1.39% de la población adulta entre 50 y 60 años tiene un nivel de colesterol en sangre inferior a 130 mg.

c) ¿Qué porcentaje de la población está comprendido entre 130 y 200 mg?.



En el gráfico podemos ver que esa probabilidad es:

$$P(130 < X < 200) = 1 - P(X < 130) - P(X > 200) = 1 - 0,0139 - 0.2743 = 0,7118$$

2.- Para hallar la proporción de jóvenes que les gusta el baloncesto se toma una muestra de tamaño 500. El resultado fue que a 350 les gusta ese deporte. Calcula:

a) Intervalo de confianza para un nivel de significación de 0,05.

Se nos pide hallar un intervalo de confianza al 95% para la proporción de jóvenes que les gusta el baloncesto

Este intervalo es $\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \ , \ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$

Datos del problema:

$n = 500;\ \hat{p} = \frac{350}{500} = 0,7;\ \alpha = 0,05;\ z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$\left(0.7 - 1.96\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{500}} \ , \ 0.7 + 1.96\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{500}} \right) = (0.66 \ , \ 0.74)$$

b) Error máximo que se comete.

Tomando $\hat{p}$ como aproximación para la proporción poblacional, con un nivel de confianza del 95% el error máximo que se comete es:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{500}} = 0.04$$

Es decir, al tomar como proporción en la población p=0.7, con un nivel de confianza del 95% el error máximo que se comete es del 4%.

3.- El estudio de una muestra aleatoria de 100 jóvenes que se presentan a una prueba, para un puesto de trabajo en un ayuntamiento, revela que la media de edad es de 20,2 años. Sabiendo que la variable estudiada se distribuye normalmente en la población, con desviación típica 10, ¿podemos aceptar con un 95% de confianza el valor de 22 años como media de edad de todos los que asisten a la prueba?.

Se nos plantea un contraste de hipótesis Bilateral de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = 22 \\ H_1 : \mu \neq 22 \end{array}\right\}$$

Para este contraste, la región de aceptación es $R.A. = \left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Si $\overline{x} \in R.A.$ aceptamos la hipótesis nula y en caso contrario la rechazamos.

Datos del problema:

$n = 100; \; \overline{x} = 20,2; \; \mu_0 = 22; \; \sigma = 10; \quad \alpha = 0,05; \; z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$R.A. = \left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(22 - 1.96 \frac{10}{\sqrt{100}}, \, 22 + 1.96 \frac{10}{\sqrt{100}} \right) = \left(20.04, \, 23.96 \right)$$

Como $20.2 \in \left(20.04, \, 23.96 \right)$ aceptamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $\mu = 22$.

La resolución de este contraste se podía haber hecho de forma equivalente utilizando el estadístico de prueba, $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ y ver si cae en la región de rechazo, que para este test bilateral es: $R.R. = \left(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2} \right) = \left(-1.96 \, , \, 1.96 \right)$.

$z = \dfrac{20.2 - 22}{\dfrac{10}{\sqrt{100}}} = -1.8$; como $-1.8 \in \left(-1.96, 1.96 \right)$, aceptamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $\mu = 22$.

¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza de la media muestral perteneciera a (20.2-1.78;20.2+1.78) con el mismo nivel de significación?

Nos están pidiendo el tamaño muestral para que el error máximo fuera 1.78, con un nivel de confianza del 95%

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,78 \Leftrightarrow 1,96 \frac{10}{\sqrt{n}} = 1,78 \Leftrightarrow \frac{19,6}{1,78} < \sqrt{n} \Leftrightarrow 11.01 < \sqrt{n} \Leftrightarrow n > 121.22$$

Por tanto se necesita que $n \geq 122$

4.- El coste de fabricación de x unidades de lavadoras viene dado por la función C(x)= 50.000 + 1000x, donde C(x) viene dado en pesetas. Se pide:

a) Halla el coste de fabricación de 3 lavadoras.

$C(x) = 50000 + 1000x$

$C(3) = 50000 + 1000 \cdot 3 = 53000$ pesetas

b) Si el coste de fabricación ha sido de un millón de pesetas, ¿cuántas lavadoras se han fabricado?

$C(x) = 1000000 \Leftrightarrow 50000 + 1000x = 1000000 \Leftrightarrow 1000x = 950000 \Leftrightarrow x = 950$ lavadoras

c) Si el coste de fabricación es de 40.000 pesetas, ¿Cuántas lavadoras se han fabricado?. Razona la respuesta.

$C(x) = 40000 \Leftrightarrow 50000 + 1000x = 40000 \Leftrightarrow 1000x = -10000 \Leftrightarrow x = -10$

Esto es imposible, no se ha fabricado ninguna lavadora. La función esta definida para $x \geq 0$ y el coste mínimo es 50000.

5.- Las necesidades mínimas diarias, de unidades de tres vitaminas A, B y C, en la dieta de un determinado animal, son respectivamente 6,24 y 16. Existen dos tipos de piensos P y Q que pueden suministrar esas vitaminas, cuyos contenidos, en unidades por kilogramo de peso, vienen dados en la siguiente tabla:

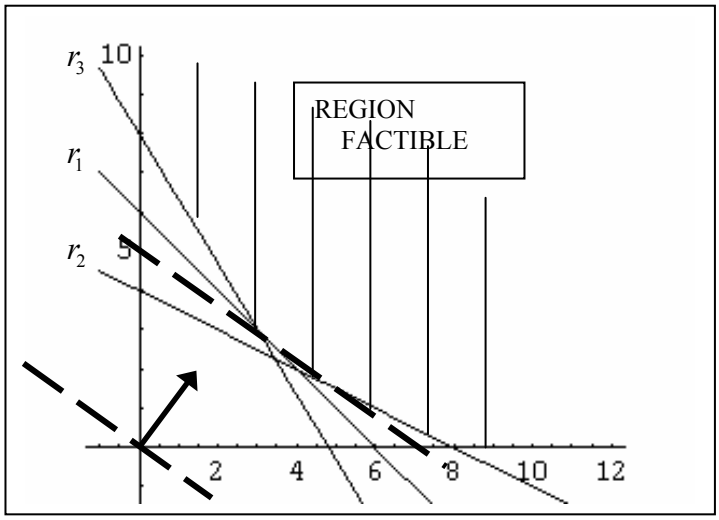
	Unidades de vitamina A	**Unidades de vitamina B**	**Unidades de vitamina C**
Pienso P	**1**	**5**	**2**
Pienso Q	**1**	**3**	**4**

El coste de cada kilogramo de pienso tipo P es de 80 pesetas, mientras que el coste de cada kilogramo de pienso tipo Q es de 75 pesetas. ¿Cómo se ha de configurar la dieta de costo global mínimo?

Se trata de minimizar la función de coste global del pienso.
Esta función es: $f(x,y) = 80x + 75y$
Con las siguientes restricciones para cubrir el aporte vitamínico y de no negatividad de las variables :

Vitamina A	$x + y \geq 6$
Vitamina B	$5x + 3y \geq 24$
Vitamina C	$2x + 4y \geq 16$
	$x \geq 0; \quad y \geq 0$

$$\begin{aligned} &Min \quad f(x,y) = 80x + 75y \\ &s.a.: r_1 \equiv \quad x + y \geq 6 \\ &\quad r_2 \equiv \; 5x + 3y \geq 24 \\ &\quad r_3 \equiv \; 2x + 4y \geq 16 \\ &\quad x \geq 0; y \geq 0 \end{aligned}$$



Los puntos extremos que se obtienen son:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 5x + 3y = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow f(3,3) = 80{\cdot}3 + 75{\cdot}3 = 465$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 3y = 24 \\ 2x + 4y = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow f(4,2) = 80{\cdot}4 + 75{\cdot}2 = 470$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 5x + 3y = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3,43 \\ y = 2,28 \end{array}\right\} \rightarrow (3,43 \;,\; 2,28) \notin \mathrm{R}.\textit{Factible}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 8 \end{array}\right\} \rightarrow f(0,8) = 80{\cdot}0 + 75{\cdot}8 = 600$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(8,0) = 80{\cdot}8 + 75{\cdot}0 = 640$$

El costo mínimo se consigue con 3 kilos de pienso P y 3 kilos de pienso Q.