PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
L.O.G.S.E

CURSO 1999-2.000 - CONVOCATORIA: Junio

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5
- Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora y la tabla de distribución normal.

PRUEBA A

1.- En los años 60, la estatura de los españoles varones que hacían el Servicio Militar se distribuía según una normal de media 170 cms., con una desviación típica de 9 cms. En la actualidad se ha realizado un muestreo a 36 adultos varones dando una media de 172 cms. Se pide:

a) ¿Podemos afirmar, con una confianza del 95% , que esa diferencia es debida al azar?

Se nos plantea un contraste de hipótesis unilateral de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu > 170 \end{array}\right\}$$

Para este contraste, la región de rechazo es $R.R. = \left(\mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right)$

Si $\overline{x} \in R.R.$ rechazamos la hipótesis nula y en caso contrario la aceptamos.

Datos del problema:

$\overline{x} = 172;\ \ n = 36;\ \ \mu_0 = 170;\ \ \sigma = 9;\ \ \alpha = 0,05;\ \ z_{0,05} = 1.64$

$$R.R. = \left(170 + 1.64 \frac{9}{\sqrt{36}}, \infty \right) = (172.46\ , \infty)$$

Como $172 \notin (172.46, \infty)$ no rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $\mu = 170$.

La resolución de este contraste se podía haber hecho de forma equivalente utilizando el estadístico de prueba, $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ y ver si cae en la región de rechazo que para este estadístico en este contraste es: $R.R. = (z_\alpha, \infty) = (1.64, \infty)$.

$z = \dfrac{172 - 170}{\dfrac{9}{\sqrt{36}}} = \dfrac{2}{\dfrac{9}{6}} = 1,33$; como $1.33 \notin (1.64,\ \infty)$, no rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $\mu = 170$.

b) ¿Qué se puede decir si esa media se ha calculado utilizando una muestra de 900 jóvenes?.

$\overline{x} = 172; \quad n = 900; \quad \mu_0 = 170; \quad \sigma = 9; \quad \alpha = 0,05; \; z_{0,05} = 1.64$

El estadístico de prueba sigue siendo, $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ y la región de rechazo es: $R.R. = (z_\alpha, \infty) = (1.64, \infty)$.

$z = \dfrac{172 - 170}{\dfrac{9}{\sqrt{900}}} = \dfrac{2}{\dfrac{9}{30}} = 6.67$; como $6.67 \in (1.64, \; \infty)$, rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $\mu > 170$.

2.- El peso de las 100 vacas de una ganadería se distribuye según una normal de media 600 kilogramos y una desviación típica de 50 kilos. Se pide:

a) ¿Cuántas vacas pesan más de 570 kilos?

$X =$ " Peso de una vaca ";
$X \approx N(600, 50)$

La probabilidad de que una vaca pese más de 570 kilos es:

$$P(X > 570) = P\left(\frac{X-600}{50} > \frac{570-600}{50}\right) = P(Z > -0.6) = 1 - P(Z > 0.6) =$$
$$= 1 - 0.2743 = 0.7257$$

Quiere decir esto que el 72.57% de las vacas pesan más de 570 kilos, es decir, unas 73 vacas de las 100 de la ganadería pesan más de 570 kilos.

b) ¿Cuántas pesan menos de 750 kilos?

La probabilidad de que una vaca pese entre 500 y 700 kilos es:

$$P(X < 750) = P\left(\frac{X-600}{50} \leq \frac{750-600}{50}\right) = P(Z < 3) = 1 - P(Z > 3) =$$
$$= 1 - 0.0014 = 0.9986$$

Quiere decir esto que el 99.86% de las vacas pesan menos de 750 kilos, es decir, las 100 de la ganadería pesan menos de 750 kilos.

c) ¿Cuántas pesan entre 500 y 700 kilos?

La probabilidad de que una vaca pese entre 500 y 700 kilos es:

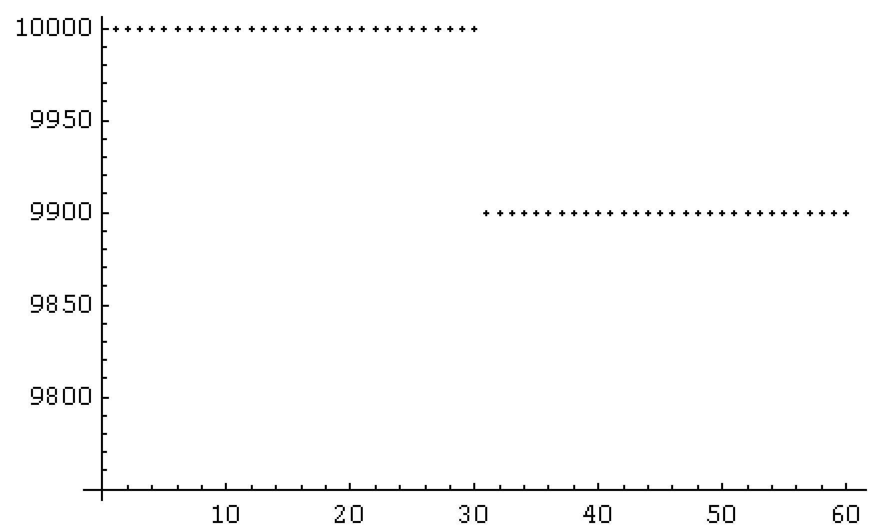
$$P(500 < X < 700) = P\left(\frac{500-600}{50} < \frac{X-600}{50} < \frac{700-600}{50}\right) = P(-2 < Z < 2) =$$
$$= 1 - 2 \cdot P(Z > 2) = 1 - 2 \cdot 0.0228 = 0.9544$$

Quiere decir esto que el 95.44% de las vacas pesan entre 500 y 700 kilos, es decir, unas 96 vacas de las 100 de la ganadería pesan entre 500 y 700 kilos.

3.- Una agencia de viajes organiza una excursión . El precio del viaje es de 10.000 pesetas, si reúne 30 o menos personas. Si supera los 30 excursionistas hace una rebaja de 100 pesetas a cada uno de los viajeros. Se pide:

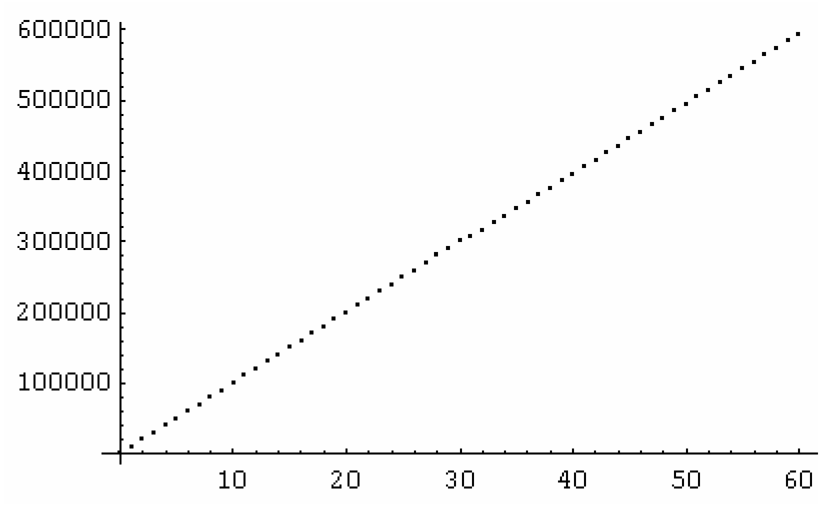
a) Halla la función que da el precio de la excursión dependiendo del número de personas. Represéntala gráficamente.

$$precio(x) = \begin{cases} 10000 & si \ \ x \leq 30 \\ 9900 & si \ \ x > 30 \end{cases}$$



b) Calcula la función que da el ingreso total que obtiene la agencia en función del número de viajeros. Represéntala gráficamente.

$$ingresos(x) = \begin{cases} 10000x & si \ \ x \leq 30 \\ 9900x & si \ \ x > 30 \end{cases}$$

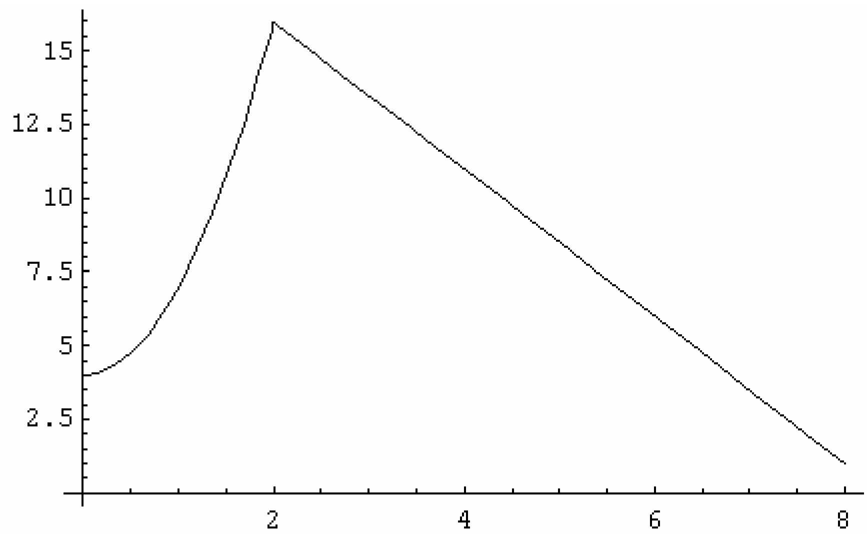


4.- El precio de un artículo (en miles de pesetas), que ha estado 8 años en el mercado, se expresa en función del tiempo t (en años) según la siguiente función:

$$P(t)=\begin{cases}3t^2+4 & si\ \ 0\le t\le 2\\ 21-\dfrac{5t}{2} & si\ \ 2<t\le 8\end{cases}$$

Se pide:

a) Representar la función precio en el intervalo dado.



b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función precio.

Hayamos la primera derivada de $P(t)$

$$P'(t)=\begin{cases}6t & si\ \ 0\le t\le 2\\ -\dfrac{5}{2} & si\ \ 2<t\le 8\end{cases}$$

Es positiva en el intervalo (0,2) y por tanto $P(x)$ es creciente en ese intervalo, por otra parte, $P'(x)$ es negativa en el intervalo (2,8) y por tanto $P(x)$ es decreciente en ese intervalo.

c) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo?. ¿Cuándo?

El precio máximo lo alcanzó al segundo año y fue $P(2)=3{\cdot}2^2+4=16$.

Obsérvese que la función es continua en x = 2 ya que los límites laterales coinciden, y además que a la derecha de 2 es creciente y que a la izquierda es decreciente, por tanto es un máximo.

5.- Tres estudiantes desean regalar una calculadora gráfica de 8.600 pesetas a un amigo. Deciden reunir esa cantidad de la siguiente forma: Pedro aporta el triple de lo que aportan los otros dos juntos. Juan aporta tres pesetas por cada dos que aporta José. Se pide:

a) Plantea el sistema de ecuaciones lineales del problema.

$$\left.\begin{array}{l} P+Ju+Jo=8600 \\ P=3(Ju+Jo) \\ Ju=\dfrac{3}{2}Jo \end{array}\right\}$$

b) Resuelve el sistema por cualquier método que conozcas.

$$\left.\begin{array}{r} P+Ju\ +\ Jo=8600 \\ P-3Ju-3Jo=0 \\ 2Ju-3Jo=0 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} P+Ju\ +\ Jo=8600 \\ -4Ju-4Jo=-8600 \\ 2Ju-3Jo=0 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} P+Ju\ +\ Jo=8600 \\ 4Ju+4Jo=8600 \\ 2Ju-3Jo=0 \end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} P+Ju\ +\ Jo=8600 \\ 2Ju+2Jo=4300 \\ 2Ju-3Jo=0 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} P+Ju\ +\ Jo=8600 \\ 2Ju+2Jo=4300 \\ -5Jo=-4300 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} P=64500 \\ Ju=1290 \\ Jo=860 \end{array}\right\}$$

PRUEBA B

1.- Para una operación de compraventa de un Supermercado se tiene, entre otras, la siguiente información. Los vendedores afirman que la "caja" media por cliente es de 750 pesetas por operación, con distribución normal. La empresa compradora efectuó un muestreo de tamaño 36 que dio un gasto medio de 722 pesetas y una desviación típica de 56 pesetas. Se pide:

a) Para un nivel de significación del 5%, indicar si el muestreo es representativo, en ensayo bilateral de la población de indican los vendedores.

Se nos plantea un contraste de hipótesis Bilateral de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = 750 \\ H_1 : \mu \neq 750 \end{array}\right\}$$

Para este contraste, la región de aceptación es $R.A.=\left(\mu_0 - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \mu_0 + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Si $\overline{x} \in R.A.$ aceptamos la hipótesis nula y en caso contrario la rechazamos.

Datos del problema:

$\overline{x} = 722;\ \ n = 36;\ \ \mu_0 = 750;\ \ \sigma = 56;\ \ \alpha = 0,05;\ \alpha/2 = 0,025;\ z_{0,025} = 1.96$

$$R.A. = \left(750 - 1.96\frac{56}{\sqrt{36}} \, , \, 750 + 1.96\frac{56}{\sqrt{36}} \right) = (731.7 \, , \, 768.3)$$

Como $722 \notin (731.7,\ 768.3)$ no aceptamos la hipótesis nula, es decir, rechazamos que $\mu = 750$.

La resolución de este contraste se podía haber hecho de forma equivalente utilizando el estadístico de prueba, $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ y ver si cae en la región de rechazo que para este test bilateral es: $R.R.=(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}) = (-1.96 \, , \, 1.96)$.

$z = \dfrac{722 - 750}{\dfrac{56}{\sqrt{36}}} = \dfrac{-28}{\dfrac{56}{6}} = -3$; como $-3 \notin (-1.96, 1.96)$, no aceptamos la hipótesis nula, es decir, rechazamos que $\mu = 750$.

---

b) En el supuesto de que las 750 pesetas sea el valor mínimo de gasto de los clientes, comprobar la validez de la muestra en ensayo unilateral con el mismo nivel.

Se nos plantea un contraste de hipótesis unilateral de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq 750 \\ H_1 : \mu < 750 \end{array}\right\}$$

$\overline{x} = 722;\ \ n = 36;\ \ \mu_0 = 750;\ \ \sigma = 56;\ \ \alpha = 0,05;\ \ z_{0,05} = 1.64$

Para este contraste unilateral la región de rechazo es

$$R.R. = \left(\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right) = \left(-\infty \, , \, 750 - 1.64\frac{56}{\sqrt{36}} \right) = (-\infty \, , \, 734.7)$$

Como $722 \in (-\infty \, , \, 734.7)$ rechazamos la hipótesis nula, es decir, rechazamos que $\mu = 750$.

2.- En una muestra aleatoria de 300 votantes, 180 se mostraron favorables al partido A.

a) Estimar en % y con un nivel de confianza del 99% , entre qué límites se encuentra la proporción de votantes al partido A.

Se nos pide hallar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de votantes del partido A

Este intervalo es $\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \text{ , } \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$

Datos del problema:

$n = 300;\ \hat{p} = \frac{180}{300} = 0,6;\ \alpha = 0,01;\ z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,58$

$$\left(0.6 - 2.58\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{300}} \text{ , } 0.6 + 2.58\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{300}} \right) = (0.527 \text{ , } 0.672)$$

b) Con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra para que se realice una estimación con un error menor o igual a 0,05?.

Datos del apartado:

$p = 0.6;\quad E = 0.05;$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

El máximo error que se comete, con un nivel de confianza del 95 % es:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < E$$

$$1.96\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{n}} < 0.05$$

$$\sqrt{\frac{0.24}{n}} < \frac{0.05}{1.96}$$

$$\sqrt{\frac{0.24}{n}} < 0.0255$$

$$\frac{0.24}{n} < (0.0255)^2$$

$$\frac{0.24}{0.00065} < n$$

$$n > 369.08 \Rightarrow \boxed{n \geq 370}$$

3.- Una empresa dedicada a la fabricación de luminosos publicitarios anuncia que, como máximo, hay un 1% de luminosos defectuosos. Se selecciona una muestra de 100 rótulos publicitarios y se observa que aparecen 3 defectuosos. Se pide:

a) Con un nivel de significación del 5%, ¿podemos aceptar la hipótesis del fabricante?

Se nos plantea un contraste de hipótesis unilateral de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \le p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0 : p \le 0,01 \\ H_1 : p > 0,01 \end{array}\right\}$$

Para este contraste la región de rechazo es

$$R.R. = \left(p_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{p_0\left(1-p_0\right)}{n}}, \infty \right)$$

Si $\hat{p} \in R.R.$ rechazamos la hipótesis nula y en caso contrario la aceptamos.

Datos del problema:

$$n = 100;\ \hat{p} = \frac{3}{100} = 0,03;\ \ p_0 = 0,01;\ \ \alpha = 0,05;\ \ z_{0,05} = 1,64$$

$$R.R. = \left(0,01 + 1.64\sqrt{\frac{0,01(1-0,01)}{100}}\ , \infty \right) = \left(0,026\ , \infty\right)$$

Como $0,03 \notin \left(0.026,\ \infty\right)$ rechazamos la hipótesis nula, es decir, no aceptamos que $p \le 0,01$.

La resolución de este contraste se podía haber hecho de forma equivalente utilizando el estadístico de prueba, $z = \dfrac{p - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ y ver si cae en la región de rechazo $\left(z_\alpha , \infty\right) = \left(1,64\ ,\ \infty\right)$.

$$z = \frac{0,03 - 0,01}{\sqrt{\dfrac{0,01(1-0,01)}{100}}} = 2.01$$; como $2,01 \in \left(1,64\ ,\ \infty\right)$, rechazamos la hipótesis nula, es decir, no aceptamos la hipótesis nula, $p \le 0,01$.

b) ¿Y con un nivel de confianza del 99%?

La región de rechazo para el estadístico de prueba es: $\left(z_\alpha , \infty\right) = \left(z_{0,01}, \infty\right) = \left(2,33\ ,\ \infty\right)$.

el estadístico de prueba vale $z = 2,01$, y como $2,01 \notin \left(2,33\ ,\ \infty\right)$, no rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $p \le 0.01$

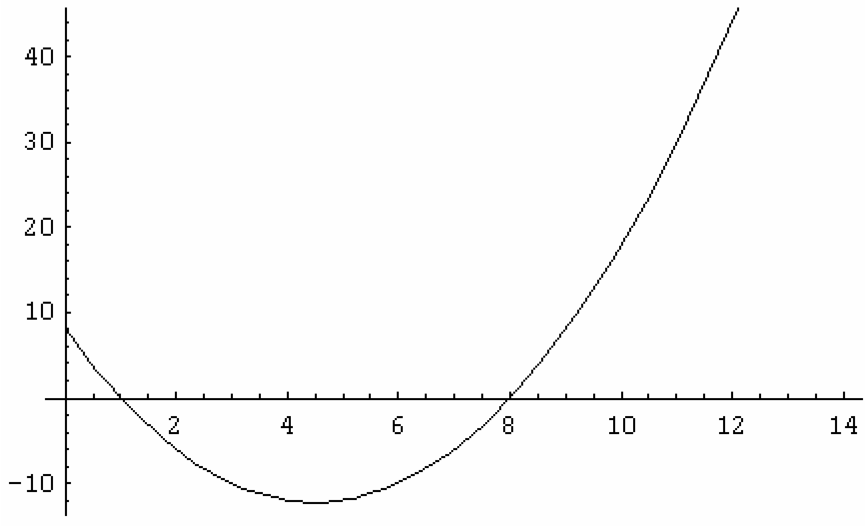
4.- En un día desapacible, la temperatura (T) en grados centígrados varió con el tiempo t (en horas) según la función $T(t) = t^2 - 9t + 8$ para $0 \leq t \leq 12$. Se pide:

a) ¿Qué temperatura hacía a la dos de la mañana?

Nos piden calcular $T(2) = 2^2 - 9 \cdot 2 + 8 = -6$ grados

b) ¿Cuál fue la temperatura máxima? ¿A qué hora se produjo?

Calcular $T'(t) = 2t - 9$ y $T''(t) = 2 > 0$, como la derivada segunda es positiva quiere decir que T no tiene ningún máximo en el interior del intervalo (0,12). Por tanto Hay que evaluar la función en los extremos del intervalo y ver en que punto de ellos se alcanza el máximo.



$T(0) = 8$

$T(12) = 44$

La temperatura máxima se alcanzó a las 12 horas y se alcanzaron 44 grados.

c) ¿A qué hora hubo una temperatura de cero grados?

Hay que resolver la ecuación $T(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 8 \end{cases}$

d) ¿Cuál fue el intervalo de variación de la temperatura desde las 6 a las 12 horas?

$\left. \begin{array}{l} T(6) = -10 \\ T(12) = 44 \end{array} \right\}$ La temperatura varió de –10 a 44 grados

5.- La Consejería de Sanidad del Gobierno de Canarias dispone de 30 médicos, 48 enfermeras y 240 millones de pesetas para construir centros asistenciales en los barrios de Guanarteme y Escaleritas. Los requerimientos de cada centro vienen dados por la siguiente tabla:

Zonas	Médicos	Enfermeras	Millones
Guanarteme	3	3	30
Escaleritas	2	4	10

Si la autoridades consideran prioritario prestar atención sanitaria al mayor número de personas y, además, si en cada centro de Guanarteme se proporciona asistencia a 1500 personas (de media) y cada centro de Escaleritas puede atender a 600 personas de media, ¿cuántos centros hay que poner en cada barrio?

Se trata de maximizar la función, numero de pacientes con asistencia médica.

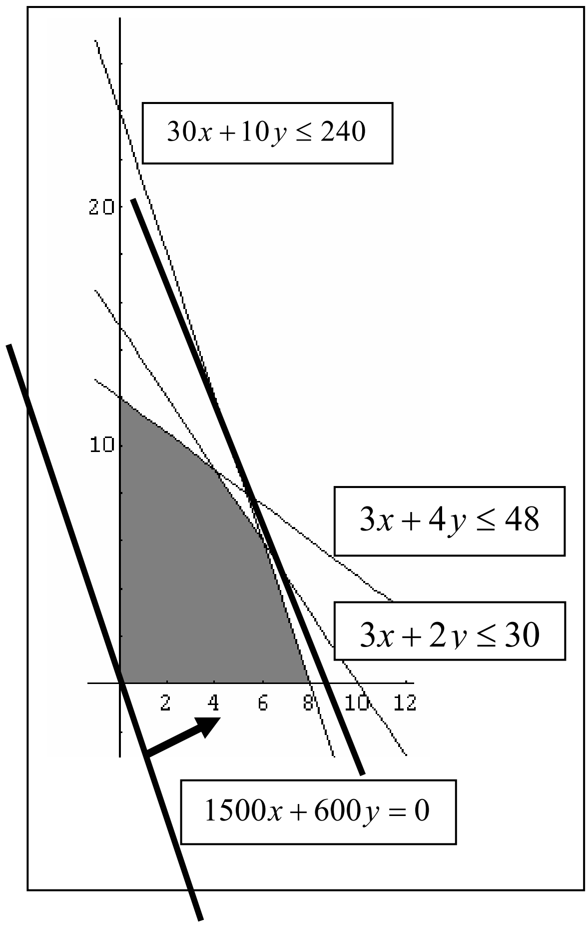
Esta función es: $f(x,y) = 1500x + 600y$

Con las siguientes restricciones presupuestarias, de personal y de no negatividad de las variables :

Millones	$30x + 10y \leq 240$
Médicos	$3x + 2y \leq 30$
Enfermeras	$3x + 4y \leq 48$
	$x \geq 0; \quad y \geq 0$

Tenemos pues que:

$$\begin{array}{ll} Max & f(x,y) = 1500x + 600y \\ s.a.: & 30x + 10y \leq 240 \\ & 3x + 2y \leq 30 \\ & 3x + 4y \leq 48 \\ & x \geq 0; y \geq 0 \end{array}$$



Los puntos extremos de la región factible son: (0,12), (4,9), (6,6) y (8,0)

Evaluamos la función objetivo en estos puntos y se obtiene:

$$f\left(0,12\right) = 7200$$
$$f\left(4,9\right) = 11400$$
$$f\left(6,6\right) = 12600$$
$$f\left(8,0\right) = 12000$$

Por lo tanto el máximo número de cuidadanos con asistencia médica se tiene cuando se hacen 6 centros en Guanarteme y 6 en Escaleritas.