PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD L.O.G.S.E

CURSO 2.001-2.002 - CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5

Prueba A

1.- Se hizo una encuesta a 325 personas mayores de 16 años y se encontró que 120 iban al teatro regularmente:

Datos del problema:

Tamaño muestral $n = 325$

Proporción muestral de personas que van regularmente al teatro: $\hat{p} = \dfrac{120}{325} = 0.369$

a) Hallar, con un nivel de confianza del 94%, un intervalo para estimar la proporción de los ciudadanos que van al teatro regularmente.

Nivel de confianza $= 1 - \alpha = 0,94 \Rightarrow \alpha = 0,06$

El intervalo de confianza para una proporción es:

$$\left(\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0.369 \pm z_{0,03}\sqrt{\frac{0.369(1-0.369)}{325}}\right) = \left(0.369 \pm 1.89\sqrt{\frac{0.233}{325}}\right) = (0.318, 0.420)$$

b) En las mismas condiciones del apartado anterior, se realiza la experiencia para conseguir una cota de error del 0.01. ¿Cuál sería el tamaño de la muestra?

El término del error es, $z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, queremos que sea menor que 0,01, por tanto

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < 0,01$$

$$1,89\sqrt{\frac{0,369\cdot(1-0,369)}{n}} < 0,01$$

$$1,89\sqrt{\frac{0,233}{n}} < 0,01$$

$$\sqrt{\frac{0,233}{n}} < \frac{0,01}{1,89}$$

$$\sqrt{\frac{0,233}{n}} < 0,0053$$

$$\frac{0,233}{n} < 0,0053^2$$

$$\frac{0,233}{n} < 0,000028$$

$$n = \frac{0,233}{0,000028} = 8321,43 \cong 8322$$

2.- Una fábrica de coches lanza al mercado el modelo "Mathe" del que se sabe que sus pesos siguen una distribución normal de media 3.100 kilos y una desviación típica de 130 kilos.

Datos del problema:

X = "Peso de un coche modelo Mathe"
$X \approx N(3100,130)$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al comprar un coche Mathe, pese más de 3.130 kilos?

Nos piden la probabilidad, $P(X > 3130)$, primero tipificaremos y luego buscamos la probabilidad correspondiente en la N(0,1).

$$P(X > 3130) = P\left(\frac{X-3100}{130} > \frac{3130-3100}{130}\right) = P\left(Z > 0.23\right) = 0,4090$$

b) ¿Qué distribución seguirá la media de las muestras de tamaño 100 de coches Mathe?

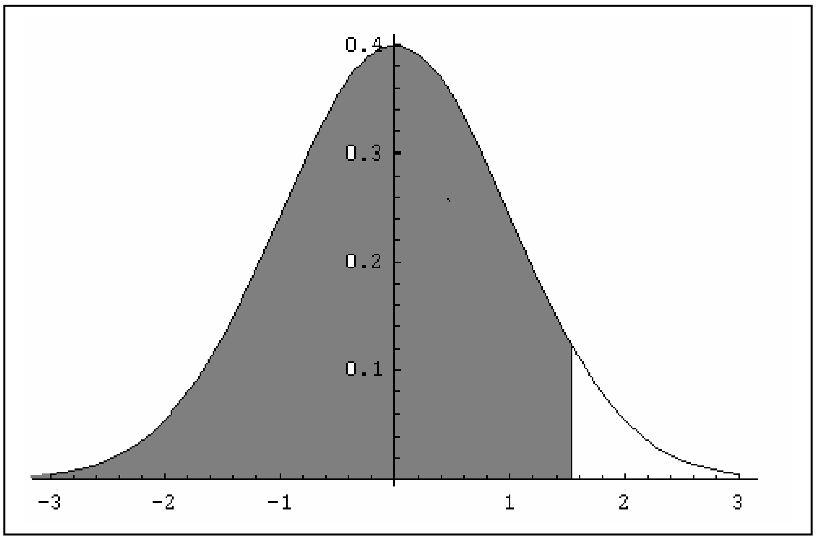
La media, $\bar{X}$, de una muestra de tamaño ***n***, de normales independientes de media μ y desviación típica σ, sigue una distribución, $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, en nuestro caso es:

$$\bar{X} \approx N\left(3100, \frac{130}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{X} \approx N\left(3100,13\right)}$$

c) ¿Cuál será la probabilidad de que al comprar un coche pese más de 2900 kilos y menos de 3500?

Nos piden la probabilidad, $P(2900 < X < 3500)$, primero tipificaremos y luego buscamos la probabilidad correspondiente en la N(0,1).

$$P(2900 < X < 3500) = P\left(\frac{2900-3100}{130} < \frac{X-3100}{130} > \frac{3500-3100}{130}\right) =$$
$$= P\left(-1,54 < Z < 3,08\right) = 1 - P\left(Z > 3,08\right) - P\left(Z < -1,54\right) =$$
$$= 1 - P\left(Z > 3,08\right) - P\left(Z > 1,54\right) = 1 - 0,001 - 0,0618 = 0,9381$$

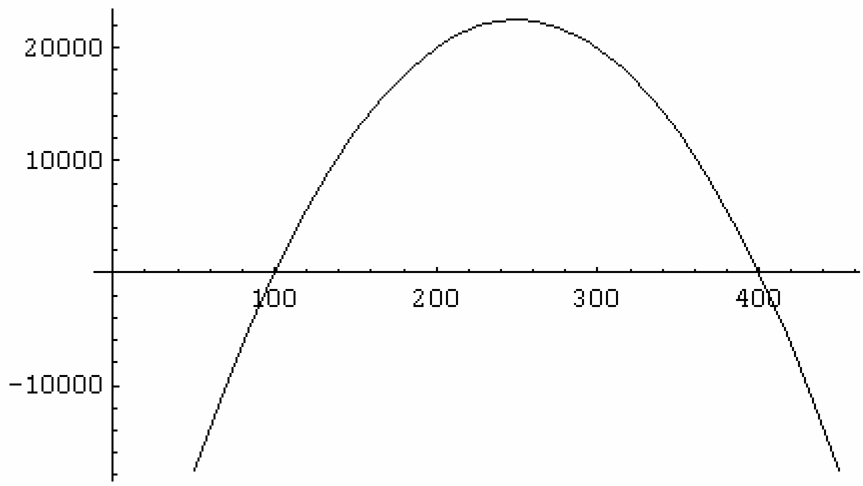


3.- Una empresa fabrica, entre otros, un tipo de artículo que vende a 520 € la unidad. Los costes de producción que tiene la empresa en la fabricación de dicho artículo vienen dados por la fórmula $C(x) = x^2 + 20x + 40000$, en donde x representa las unidades producidas. Sabiendo que el beneficio que obtiene la empresa, con este artículo, es la diferencia de los ingresos menos el coste, se pide:

a) Expresar, en función de las unidades de fabricación, el beneficio que obtiene la empresa con dicho artículo. Representar gráficamente dicho beneficio.

La función de beneficos es ingresos menos gastos, es decir,

$$B(x) = 520 \cdot x - C(x) = 520x - (x^2 + 20x + 40000) = -x^2 + 500x - 40000$$



b) ¿Cuántas unidades de dicho artículo se deben producir para que el beneficio sea máximo?

En el gráfico, al ser una parábola, su máximo lo alcanza en el punto medio de sus dos raíces, no obstante, vamos a calcularlo.

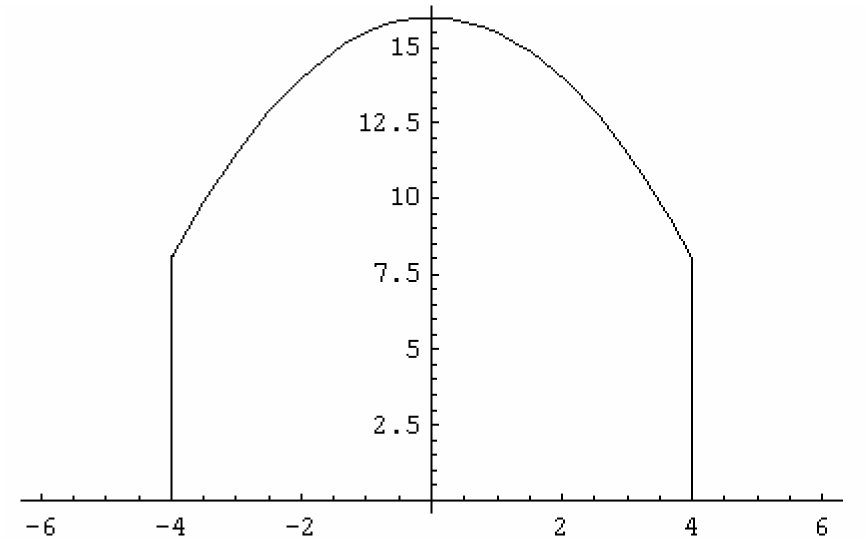
Derivamos la función de beneficios e igualamos a cero

$$f'(x) = -2x + 500; \quad f'(x) = 0; \quad -2x + 500 = 0 \Rightarrow x = 250$$

$f''(x) = -2 < 0$, por tanto, $x = 250$ es un máximo

4.- La entrada de un túnel tiene una superficie limitada por las rectas $x=-4$, $x=4$ y la parábola $y=-\frac{1}{2}x^2+16$. Se pide:

a) Dibujar la superficie de la boca del túnel.



b) ¿Podría pasar por el túnel un vehículo de 20 metros de altura?

No ya que la altura máxima del túnel es de 16 metros.

c) ¿Podría pasar por el túnel un vehículo de ocho metros de ancho y 9 metros de alto?

Si el vehículo tiene forma rectangular de 8x9 metros, en los extremos, el túnel solo tiene 8 metros de altura, $-\frac{16}{2}+16=8$, y por tanto NO pasaría por el túnel.

d) Calcular la superficie de la boca del túnel.

La superficie de la boca del túnel es exactamente el area que hay bajo curva entre los puntos –4 y 4. Esto es la integral de la de la curva entre –4 y 4.

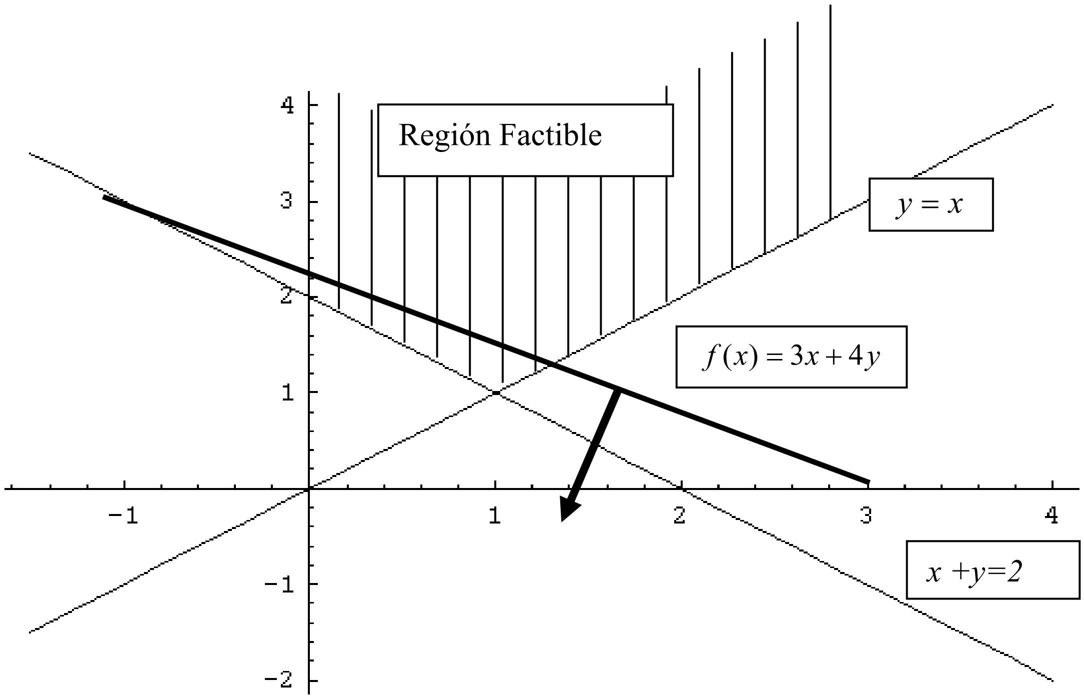
$$\int_{-4}^{4}\left(-\frac{x^2}{2}+16\right)dx=-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+16x\Bigg]_{-4}^{4}=-\frac{64}{6}+64-\left(\frac{64}{6}-64\right)=-\frac{128}{6}+128=106,67$$

5.- Se tiene la función objetivo $f(x, y) = 3x + 4y$ y las restricciones:

$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad x \leq y; \quad x + y \geq 2$$

Se pide:

a) Representar la región de posibles soluciones.



b) Hallar el punto de la región donde la función objetivo se minimiza.

La región sólo tiene dos puntos extremos, el (0,2) y el (1,1), al querer minimizar desplazamos la función objetivo en la dirección (-3,-4).

La función objetivo evaluada en los dos puntos extremos da:

$$f(0,2) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$$
$$f(1,1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$$

con lo cual el mínimo lo alcanza en el punto (1,1)

c) ¿Puede alcanzar la función objetivo el máximo en esa región?

No ya que la región es no acotada en la dirección del gradiente, (3,4).

Prueba B

1.- Se quiere hacer una encuesta entre los jóvenes para ver lo que se gastan los sábados. Suponiendo que dicho gasto es una variable normal, se pide:

a) Hallar el tamaño de la muestra suponiendo que la desviación típica es igual a 10,75, el nivel de significación es del 3% y el error máximo admitido es de 2 euros.

Datos del problema:

$$\sigma = 10,75; \quad E = 2; \quad \alpha = 0,03; \ \alpha/2 = 0.015; \ z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < E \Rightarrow z_{0,015}\frac{10,75}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 2,17\frac{10,75}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{23,3275}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow \frac{23,3275}{2} < \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} > 11,6638 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > 136,043 \cong 137$$

b) Si el nivel de confianza aumenta ¿como afecta al tamaño de la muestra? Justifica la respuesta tomando como nivel de confianza el 99%.

Si se aumenta el nivel de confianza, se tiene que aumentar el tamaño muestral para seguir cometiendo el mismo error máximo.

Datos del problema: $\sigma = 10,75; \quad E = 2; \quad \alpha = 0,01; \quad \alpha/2 = 0,005;$

$z_{0,005}$, se obtiene interpolando entre los puntos (2,57 , 0,00508) y (2,58 , 0,00494).

O bien, aunque es algo menos preciso, tomar el mas próximo a 0,005, que en este caso es 2,58.

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < E \Rightarrow z_{0,005}\frac{10,75}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 2,58\frac{10,75}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{27,735}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow \frac{27,735}{2} < \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} > 11,8675 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > 192,308 \cong 193$$

2.- Se realizan 100 lanzamientos de una moneda, correctamente fabricada, y se observa que sólo en 36 ocasiones ha salido cruz:

a) Con un nivel de confianza del 99%, ¿el resultado anterior permite rechazar la hipótesis de que la probabilidad de obtener cruz es de $\frac{1}{2}$?

Se nos plantea un contraste de hipótesis de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{array}\right\}$$

Para este contraste la región de aceptación es:

$$\text{R.A.}=\left(p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\ ,\ p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$$

Si $\hat{p} \in R.A.$ aceptamos la hipótesis nula y caso contrario la rechazamos.

Datos del problema:

$$n = 100;\ \hat{p} = \frac{36}{100} = 0,36;\ \ p_0 = 0,5;\ \ \alpha = 0,01;\ \ \alpha/2 = 0,005;\ \ z_{0,005} = 2,58$$

$$R.A. = \left(0,5 - 2,58\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{100}}\ ,\ 0,5 + 2,58\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{100}} \right) = (0,371\ ,\ 0,629)$$

Como $0,36 \notin (0.371,\ 0.629)$ rechazamos la hipotesis nula.

b) ¿Qué conclusión podemos sacar si se obtienen 42 cruces en 100 lanzamientos?

Datos del problema:

$$n = 100;\ \hat{p} = \frac{42}{100} = 0,42;\ \ p_0 = 0,5;\ \ \alpha = 0,01;\ \ \alpha/2 = 0,005;\ \ z_{0,005} = 2,58$$

$$R.A. = \left(0,5 - 2,58\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{100}}\ ,\ 0,5 + 2,58\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{100}} \right) = (0,371\ ,\ 0,629)$$

Como $0,42 \in (0.371,\ 0.629)$ aceptamos la hipótesis nula.

3.- La estatura de los estudiantes de 2º de bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias sigue una normal $N(170,15)$. Se pide:

a) Si consideramos muestras de 144 estudiantes ¿cuál es la distribución de la variable media muestral?

La media, $\bar{X}$,de una muestra de tamaño ***n***, de normales independientes de media μ y desviación típica σ, sigue una distribución, $N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, en nuestro caso es:

$$\bar{X} \approx N\left(170,\frac{15}{\sqrt{144}}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{X} \approx N(170,1.25)}$$

b) Calcular la probabilidad de que, en una muestra de 144 estudiantes, la estatura media sea mayor que 180 centímetros.

$$P(\bar{X} > 180) = P\left(\frac{\bar{X}-170}{1,25} > \frac{172-170}{1,25}\right) = P(Z > 1,6) = 0,0548$$

c) Calcular a partir de qué valor se encuentra el 15% de las estaturas medias superiores.

Tenemos que encontrar un valor x_0 de manera que $P(\bar{X} > x_0) = 0,85$

$$P(\bar{X} > x_0) = 0,15 \Rightarrow P\left(\frac{\bar{X}-170}{1,25} > \frac{x_0-170}{1,25}\right) = 0,15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{x_0-170}{1,25}\right) = 0,15 \Rightarrow \frac{x_0-170}{1,25} = z_{0,15} \Rightarrow \frac{x_0-170}{1,25} = 1,04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = 170 + 1,04 \cdot 1,25 = 171.3$$

4.- En una potabilizadora se pueden producir $P(x)$ toneladas de agua potable si se emplean un número x de trabajadores. Si la producción de las toneladas de agua viene dada por la fórmula $P(x) = x(60 - x)$, se pide:

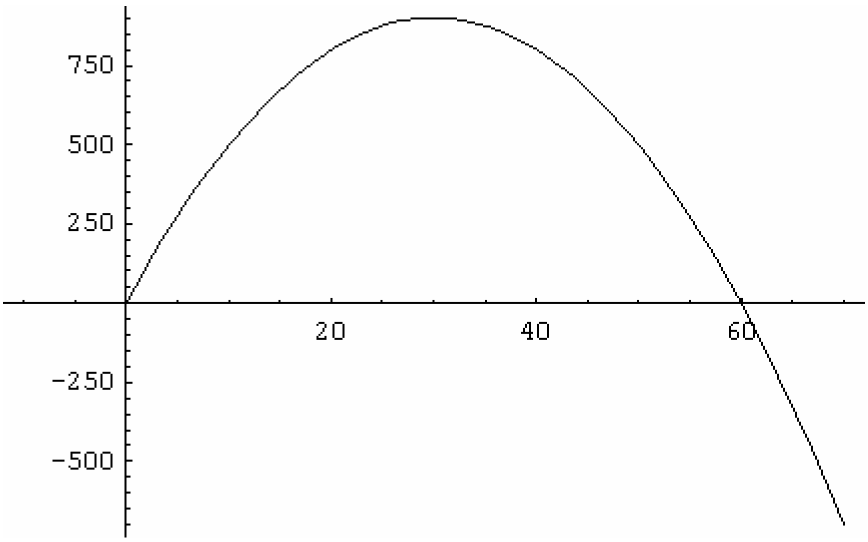
a) ¿Cuántos trabajadores tienen que contratar para que la potabilizadora produzca lo máximo posible?

Tenemos que derivar e igualar a cero la función de producción $P(x) = -x^2 + 60x$

$P'(x) = -2x + 60 \Rightarrow P'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 60 = 0 \Rightarrow x = 30$

$P''(x) = -2$, quiere decir que en $x = 30$ hay un máximo.

b) Hacer la gráfica de la producción y averiguar a partir de cuántos trabajadores la empresa tiene que dejar de producir.



A partir de 60 trabajadores la empresa tiene que dejar de producir.

5.- Una empresa compra 5.400 barriles de petróleo de tres tipos. El tipo A lo compra a 27 € el barril, el petróleo del tipo B a 28 € y el del tipo C a 31 €, el barril. El precio total asciende a 156.000 €. Si el primer suministrador vende a la empresa el 30% del total, se pide:

a) Plantear las ecuaciones que correspondan al enunciado.

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=5400 \\ 27A+28B+31C=15600 \\ A=\dfrac{30}{100}5400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B+C=5400 \\ 27A+28B+31C=15600 \\ A=1620 \end{array}\right\}$$

b) ¿Cuál es la cantidad de petróleo de cada tipo comprado?

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=5400 \\ 27A+28B+31C=15600 \\ \boxed{A=1620} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} B+C=5400-1620 \\ 28B+31C=15600-43740 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} B+C=3780 \\ 28B+31C=112260 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -28B-28C=-105840 \\ 28B+31C=112260 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3C=112260-105840=6420 \Rightarrow \boxed{C=2140}$$

$$B=3780-C \Rightarrow \boxed{B=1640}$$