PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD L.O.G.S.E

CURSO 2.001-2.002 - CONVOCATORIA: Junio

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5

Prueba A

1.- Un profesor afirma que el porcentaje de alumnos de bachillerato de su centro que fuman no sobrepasa el 15%. Si en una muestra de 60 de esos alumnos se observó que 12 fuman:

i) ¿Es aceptable la afirmación del profesor con un nivel de significación de 0.01?

Se nos plantea un contraste de hipótesis unilateral de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \le p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0 : p \le 0{,}15 \\ H_1 : p > 0{,}15 \end{array}\right\}$$

Para este contraste la región de rechazo es $R.R. = \left(p_0 + z_\alpha \sqrt{\dfrac{p_0\left(1-p_0\right)}{n}}, \infty \right)$

Si $\hat{p} \in R.R.$ rechazamos la hipótesis nula y en caso contrario la aceptamos.

Datos del problema:

$$n = 60;\ \hat{p} = \frac{12}{60} = 0{,}2;\ \ p_0 = 0{,}15;\ \alpha = 0{,}01;\ z_{0{,}01} = 2{,}33$$

$$R.R. = \left(0{,}15 + 2{,}33\sqrt{\frac{0{,}15\left(1-0{,}15\right)}{60}}, \infty \right) = \left(0{,}2574\ , \infty\right)$$

Como $0{,}2 \notin \left(0.2574, \infty\right)$ no rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $p \le 0{,}15$.

La resolución de este contraste se podía haber hecho de forma equivalente utilizando el estadístico de prueba, $z = \dfrac{p - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ y ver si cae en la región de rechazo, que para este estadístico es: $\left(z_\alpha, \infty\right) = \left(2{,}33, \infty\right)$.

$z = \dfrac{0{,}2 - 0{,}15}{\sqrt{\dfrac{0{,}15(1-0{,}15)}{60}}} = 1{,}084$; como $1{,}084 \notin \left(2{,}33, \infty\right)$, no rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos la hipótesis nula, $p \le 0{,}15$.

ii) ¿La afirmación del apartado anterior es la misma si el nivel de confianza es del 90%?

$$n = 60;\ \hat{p} = \frac{12}{60} = 0,2;\ \ p_0 = 0,15;\ \ \alpha = 0,1;\ \ z_{0,1} = 1,28$$

El estadístico de prueba sigue siendo

$$z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,2 - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{60}}} = 1,084$$

y la región de rechazo es $(z_\alpha, \infty) = (1,28\ ,\ \infty)$.

como $1,084 \notin (1,28\ ,\ \infty)$, tampoco rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $p \leq 0,15$.

2.- Un laboratorio farmacéutico afirma que el número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar una determinada enfermedad sigue una variable normal con desviación típica igual a 8. Se toma una muestra de 100 enfermos a los que se les suministra el medicamento y se observa que la media de horas que tardan en curarse es igual a 32.

i) Encontrar un intervalo de confianza, con nivel de confianza del 99%, para la media del número de horas que tarda en curar el medicamento.

Datos del problema:

$\sigma = 8;\ \ n = 100;\ \bar{x} = 32;\quad \alpha = 0,01;\ z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,58$

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(32 - 2,58\frac{8}{\sqrt{100}},\ 32 + 2,58\frac{8}{\sqrt{100}}\right) = \left(29,936\ \ ,\ \ 34,064\right)$$

ii) Si el nivel de significación es igual a 0.05, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar para estimar el valor de la media con un error menor de 3 horas?

Datos del problema:

$\sigma = 8;\ \ n = 100;\ \bar{x} = 32;\quad \alpha = 0,05;\ z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < E \Rightarrow z_{0,025}\frac{8}{\sqrt{n}} < 3 \Rightarrow 1,96\frac{8}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15,68}{\sqrt{n}} < 3 \Rightarrow \frac{15,68}{3} < \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} > 5,2266 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > 27,31 \cong 28$$

3.- Los beneficios, en cientos de miles de euros, estimados para una empresa durante los próximos 5 años, vienen dados por la función:

$$b(t)=\frac{t^2-6}{t+4},\ \text{si}\ \ 0\le t\le 5$$

siendo *t* el tiempo en años.

i) ¿Cuándo la empresa deja de tener pérdidas?

Nos preguntan a partir de que valor de "t" se tendrá que $b(t)>0$

En $b(t)=\frac{t^2-6}{t+4}$, si $0\le t\le 5$, el denominador es siempre positivo, con lo cual se reduce a estudiar cuando $t^2-6>0 \Leftrightarrow t^2>6 \Leftrightarrow t>\sqrt{6}=2,45$; ya que la función está definida para $0\le t\le 5$.

ii) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que los beneficios sean iguales a 125000 euros?

Los función de beneficios mide en cientos de miles, 125000€ es 1,25 veces 100000 euros.

$$\frac{t^2-6}{t+4}=1,25 \Leftrightarrow t^2-6=1,25t+5 \Leftrightarrow t^2-1,25t-11 \rightarrow \begin{cases} \boxed{t=4} \\ t=-2,75 \end{cases}$$

t = -2,75 se descarta ya que $0\le t\le 5$.

iii) ¿Para qué valores la derivada de la función beneficio es positiva? Justificar la respuesta.

$$b'(t)=\frac{2t(t+4)-(t^2-6)1}{(t+4)^2}=\frac{t^2+8t+6}{(t+4)^2}$$

En esta expresión el denominador es siempre positivo, y el numerador también ya que no tiene raíces reales, y el término independiente es positivo. En consecuencia la función es siempre creciente.

4.- El propietario de un edificio tiene alquilados los 52 pisos del mismo a 266 euros al mes cada uno. Por cada 7 euros que aumente el alquiler de cada piso pierde un inquilino y, por tanto, queda el correspondiente piso sin alquilar.

i) ¿Cuál es el alquiler que más beneficios producirá al propietario?

La función de beneficios es numero de pisos alquilados por alquiler de cada piso $b(x) = (52 - x)(266 + 7x)$, derivamos e igualamos a cero para obtener el máximo.

$$b'(x) = -(266 + 7x) + (52 - x)7 = -14x + 98$$
$$b'(x) = 0 \Rightarrow -14x + 98 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 7}$$
$$b''(x) = -14 \Rightarrow x = 7 \text{ es un máximo.}$$

El alquiler más beneficioso es cuando tiene 7 pisos desalquilados y por tanto cobra 266+7·7=315 € por cada uno de los que están alquilados.

ii) ¿Cuál es la cantidad máxima que puede recibir el propietario por el alquiler de los pisos?

$$b(7) = (52 - 7)(266 + 7 \cdot 7) = 45 \cdot 315 = 14175 \text{ euros}$$

5.- Un museo tiene tres salas de exposiciones: A, B y C. Los precios de las entradas son, respectivamente, 2, 4 y 7 euros. Un determinado día entraron a las tres salas un total de 210 personas, siendo la recaudación conjunta igual a 810 euros. Teniendo en cuenta que la novena parte de los visitantes de la sala A es igual a la séptima parte de los visitantes de la sala B, determinar el número de visitantes de cada sala. Justificar la respuesta.

$$\left.\begin{array}{r} 2A+4B+7C=810 \\ A+B+C=210 \\ \dfrac{A}{9}=\dfrac{B}{7} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2A+4B+7C=810 \\ A+B+C=210 \\ 7A-9B=0 \end{array}\right\}$$

Resolviéndose por cualquier método se tiene que $A=90;\ B=70;\ C=50.$

Prueba B

1.- Se sabe que 2 de cada 8 habitantes de una ciudad utiliza el transporte público para ir a su trabajo. Se hace una encuesta a 140 de esos ciudadanos. Determinar:

i) Número esperado de ciudadanos que no van a su trabajo en transporte público.

Datos del problema:

$p = \frac{2}{8} = 0.25; \quad n = 140$

Tenemos pues que la variable:

X = "nº de ciudadanos que va a su trabajo en transporte público en una muestra de 400"

Sigue una distribución binomial de parámetros $n = 140,\ p = 0.25;\ X \approx B(140, 0.25)$

El valor esperado en una variable binomial es $n \cdot p = 140 \cdot 0.25 = 35$, en consecuencia, el nº esperado de ciudadanos que **No** van a su trabajo en transporte público es $140 - 35 = 105$.

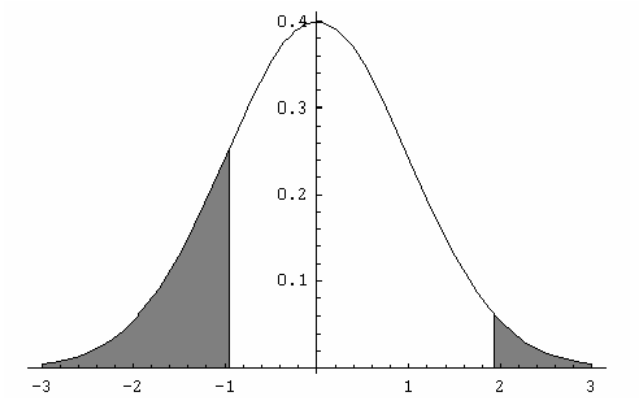
ii) Probabilidad de que el número de ciudadanos que van al trabajo en transporte público esté entre 30 y 45.

$X : B(140, 0.25)$

Como $n \cdot p = 140 \cdot 0,25 = 35 > 5 \quad y \quad n \cdot (1-p) = 140 \cdot (1-0,25) = 105 > 5$, la variable X se puede aproximar por una variable normal Y.

$$Y \approx N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p(1-p)}\right) = N\left(140 \cdot 0.25, \sqrt{140 \cdot 0.25 \cdot 0.75}\right) = N\left(35, 5.12\right)$$

Si no se hace Corrección por continuidad



$$P\left(30 \le X \le 45\right) \cong P(29,5 < Y < 45,5) = P\left(\frac{29,5-35}{5.12} \le \frac{Y-35}{5.12} \le \frac{45,5-35}{5.12}\right) =$$

$$= P\left(-1.07 \le Z \le 2.05\right) = 1 - P\left(Z \le -1.07\right) - P\left(Z \ge 2.05\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \ge 1.07\right) - P\left(Z \ge 1.95\right) = 1 - 0.1423 - 0.0202 = 0.8375$$

Si no se hace Corrección por continuidad

$$P\left(30 \le X \le 45\right) \cong P(30 < Y < 45) = P\left(\frac{30-35}{5.12} \le \frac{Y-35}{5.12} \le \frac{45-35}{5.12}\right) = P\left(-0.97 \le Z \le 1.95\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \le -0.97\right) - P\left(Z \ge 1.95\right) = 1 - 0.1660 - 0.0256 = 0.8084$$

2.- En una muestra de 600 personas de una ciudad se observa que 30 son inmigrantes.

i) Determinar un intervalo de confianza de nivel 0.95 para el porcentaje de inmigrantes en la ciudad.

Datos del problema:

$$p = \frac{30}{600} = 0.05; \quad n = 600$$

Nivel de confianza $= 1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.025$

El intervalo de confianza para una proporción es:

$$\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) =$$

$$= \left(0.05 - 1.96\sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{600}}, 0.05 - 1.96\sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{600}} \right) = \left(0.0325 \ , \ 0.0674 \right)$$

ii) Si se quiere estimar el porcentaje de inmigrantes con un error máximo de 0.02, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar si se usa un nivel de significación del 1%?

Datos del apartado:

$$p = 0.05; \quad E = 0.02; \ \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.005 \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$$

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < E$$

$$2.58\sqrt{\frac{0.05(1-0.05)}{n}} < 0.02$$

$$\sqrt{\frac{0.0475}{n}} < \frac{0.02}{2.58}$$

$$\sqrt{\frac{0.0475}{n}} < 0.0775$$

$$\frac{0.0475}{n} < \left(0.0775\right)^2$$

$$\frac{0.0475}{0.00006} < n$$

$$n > 791.667 \Rightarrow \boxed{n \geq 792}$$

3.- El equipo directivo afirma que la media del recorrido que hacen los alumnos que asisten a un centro de bachillerato es, a lo sumo, igual a dos kilómetros y medio con una desviación típica igual a 0.5 km. Se toma una muestra de 81 alumnos y se obtiene para ellos un recorrido medio de 2.6 km.

i) ¿Se puede aceptar con un nivel de significación igual a 0.05 la afirmación del equipo directivo?

Se nos plantea un contraste de hipótesis unilateral de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \le 2.5 \\ H_1 : \mu > 2.5 \end{array}\right\}$$

Para este contraste la región de rechazo es $R.R. = \left(\mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right)$

Si $\overline{x} \in R.R.$ rechazamos la hipótesis nula y en caso contrario la aceptamos.

Datos del problema:

$\overline{x} = 2.6;\quad \mu_0 = 2.5;\quad \sigma = 0.5;\quad \alpha = 0,05;\ z_{0,05} = 1.64$

$$R.R. = \left(2.5 + 1.64 \frac{0.5}{\sqrt{81}}, \infty \right) = \left(2.591\ , \infty \right)$$

Como $2.6 \in \left(0.2574, \infty \right)$ rechazamos la hipotesis nula, es decir aceptamos que $\mu \ge 2.5$.

La resolución de este contraste se podía haber hecho de forma equivalente utilizando el estadístico de prueba, $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ y ver si cae en la región de rechazo que para este estadístico es es: $R.R. = \left(z_\alpha, \infty \right) = \left(1.64,\ \infty \right)$.

$z = \dfrac{2.6 - 2.5}{\dfrac{0.5}{\sqrt{81}}} = \dfrac{0.1}{\dfrac{0.5}{9}} = 1,8$; como $1.8 \in \left(1.64,\ \infty \right)$, rechazamos la hipótesis nula, es decir aceptamos que $\mu \ge 2.5$.

ii) ¿La respuesta al apartado anterior es la misma si el nivel de confianza es del 99%?

$\overline{x} = 2.6;\quad \mu_0 = 2.5;\quad \sigma = 0.5;\quad \alpha = 0,01;\ z_{0,01} = 2.33$

El estadístico de prueba sigue valiendo lo mismo:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{2.6 - 2.5}{\dfrac{0.5}{\sqrt{81}}} = \frac{0.1}{\dfrac{0.5}{9}} = 1,8$$

Lo que varía es la R.R. que ahora es $R.R. = \left(z_\alpha, \infty \right) = \left(2.33\ , \infty \right)$

Como $1.8 \notin \left(2.33,\ \infty \right)$, aceptamos la hipótesis nula.

4.- Se sabe que el número de delfines que existirán en los próximos años en una reserva natural marítima, viene dado por la función $n(t)=\dfrac{15000t+4000}{2t+2}$, siendo *t* el número de años transcurridos. Se pide:

i) Determinar el número de delfines que habrá dentro de 9 años.

$$n(t)=\frac{15000t+4000}{2t+2}$$

Nos piden calcular $n(9)=\dfrac{15000\cdot 9+4000}{2\cdot 9+2}=6950$ delfines.

ii) ¿Cuántos años han de pasar hasta que haya 7250 delfines?

Tenemos que resolver la ecuación

$$n(t)=7250 \Leftrightarrow \frac{15000t+4000}{2t+2}=7250 \Leftrightarrow 15000t+4000=14500t+14500 \Leftrightarrow$$

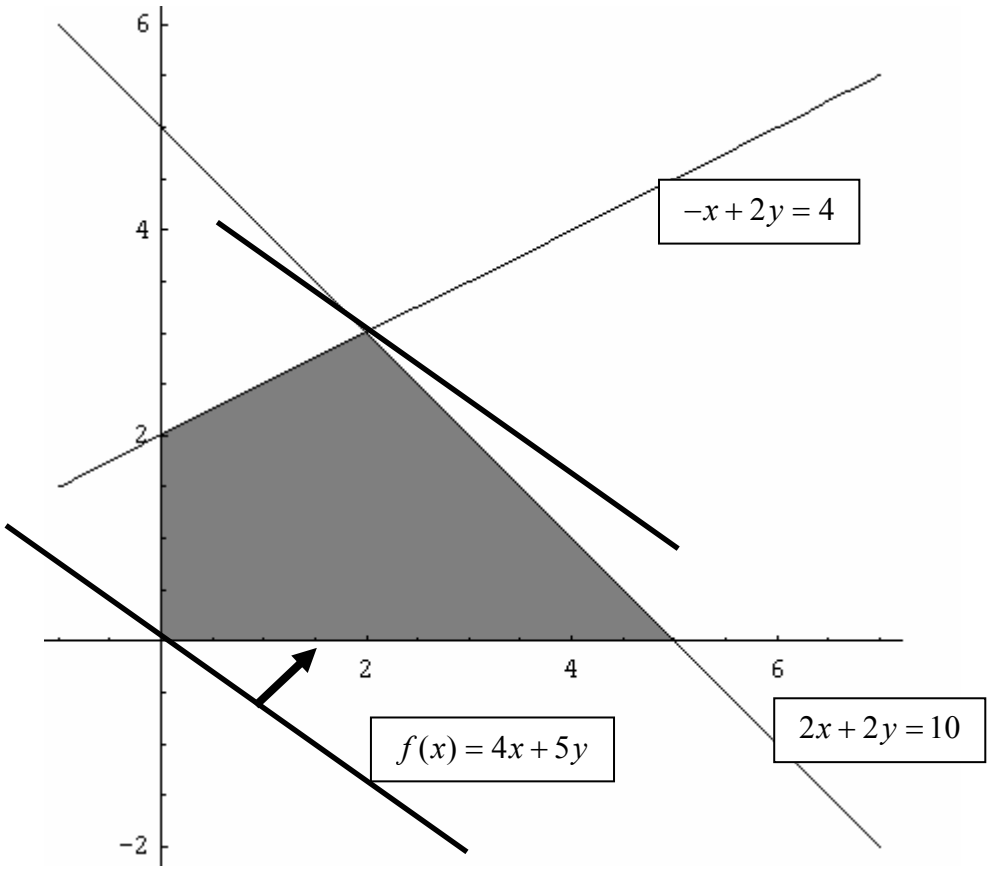
$$\Leftrightarrow 500t=10500 \Leftrightarrow t=\frac{10500}{500}=11 \text{ años}$$

iii) Determinar el valor hacia el que tenderá en el futuro el número de delfines de la reserva.

$$\lim_{t\to\infty} n(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{15000t+4000}{2t+2}=\frac{15000}{2}=7500 \text{ delfines}$$

5.- Dada la región definida por las desigualdades $2x+2y\le 10,\ -x+2y\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0$**:**

i) Representarla gráficamente.



ii) Determinar el punto de la región anterior en el que se maximiza $z=4x+5y$**.**

Los puntos extremos de la región son (0,2) (2,3) y (5,1), al querer maximizar desplazamos la función objetivo en la dirección (4,5).
Los puntos extremos son:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \end{array}\right\} \to f(0,2)=4\cdot 0+5\cdot 2=10$$

$$\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=0 \end{array}\right\} \to f(5,0)=4\cdot 5+5\cdot 0=20$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+2y=10 \\ -x+2y=4 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right\} \to f(2,3)=4\cdot 2+5\cdot 3=23$$

con lo cual el máximo lo alcanza en el punto (2,3).