PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD L.O.G.S.E

CURSO 2.002-2.003 - CONVOCATORIA:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5

Prueba A

1.- Para hacer un estudio sobre el precio/día de una habitación doble en hoteles de cuatro estrellas en Canarias, se elige una muestra de 64 de estos hoteles y se obtiene un precio/día medio de 56 € con una desviación típica de 6 €. Se pide:

a) Determinar el intervalo de confianza para el precio/día medio de una habitación doble en un hotel de cuatro estrellas en Canarias con un nivel de confianza del 97%.
b) Hallar el tamaño de la muestra que se debe tomar para que el error máximo sea de 2€, con un nivel de significación del 1%.

Solución

a) Intervalo de confianza $\left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Sustituyendo:

$$\left[56 - 2{,}17\frac{6}{\sqrt{64}}, 56 + 2{,}17\frac{6}{\sqrt{64}}\right] = [54{,}3725,\ 57{,}6275]$$

b) $z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2$; es decir $n > \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{2}\right)^2$, con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$, $\sigma = 6$. Por tanto:

$$n > \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{2}\right)^2 = \left(2{,}575\frac{6}{2}\right)^2 = 59{,}675625$$

2.- Los servicios de deportes de una ciudad afirman que, al menos, el 25% de los jóvenes, con edades entre los 14 y los 20 años, practica algún tipo de deporte. Sin embargo, el concejal responsable afirma que la proporción de practicantes es menor. Para tratar de comprobarlo, encargó una encuesta realizada a 450 jóvenes con edades entre los 14 y 20 años, resultando que 345 no practicaban ningún deporte

a) ¿Se puede aceptar la afirmación del concejal si se toma un nivel de significación del 6%?
b) ¿Se daría la misma respuesta si el estudio se hace con un nivel de confianza del 99%?

Solución

a) El contraste que se debe plantear es:

$$H_0 : p \geq p_0$$
$$H_1 : p < p_0$$

Región crítica:

$$\hat{p} - p_0 < z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

con $\hat{p}=\frac{105}{450}=0{,}233$, $z_{0,94}=-1,555$ y $p_0=0,25$. Sustituyendo:

$$-0,017=0,233-0,25\geq -1,555\sqrt{\frac{0,25(0,75)}{450}}=-0{,}031741$$

Por ello, no se rechaza H_0.

b) Si $\alpha=0,01$, $z_\alpha=2,32$ y $-0,017=0,233-0,25\geq -2,32\sqrt{\frac{0,25(0,75)}{450}}=-0{,}047356$. Por tanto, la conclusión es la misma.

3.- Una empresa de transporte estima que sus ganancias (en miles de euros) durante los próximos años seguirán la fórmula $g(t)=\frac{64000+5000t}{5t+5}$, en donde la variable $t=1,2,3,4,5,....$ representa el tiempo en años medido a partir del presente.

.

a) Hallar las ganancias correspondientes a los años primero y quinto.
b) Determinar si las ganancias aumentan o disminuyen con el paso del tiempo. Razonar la respuesta.
c) ¿Se estabilizan las ganancias cuando t crece? ¿Hacia qué valor? Razonar la respuesta.

Solución

a) $g(t)=\frac{64000+5000t}{5t+5}$, $g(1)=6900$ miles de euros, $g(5)=\frac{8900}{3}=2966,66$ miles de euros.

b) $g'(t)=\frac{5000(5t+5)-5(64000+5000t)}{(5t+5)^2}=\frac{-295000}{(5t+5)^2}$ Es decir, cuando $t>0$, $g'(t)<0$. Por ello $g(t)$ decrece cuando $t>0$ aumenta.

c) $\lim_{t\to\infty} g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{64000+5000t}{5t+5}=1000$

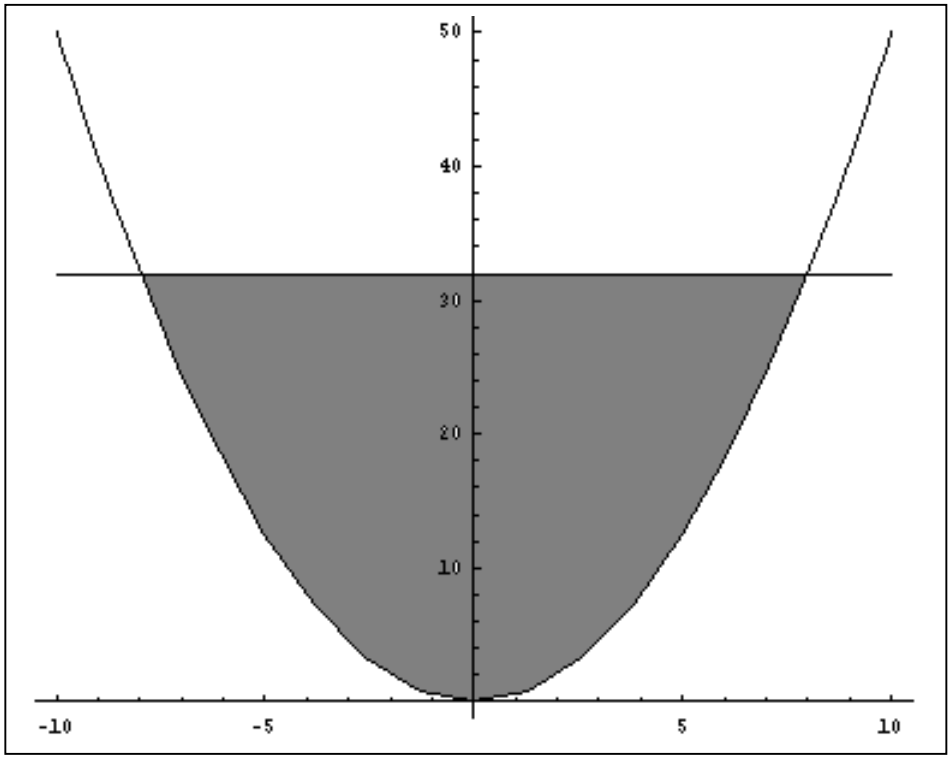
4.- Una parcela de terreno (cuyo perímetro está expresado en metros) está determinada por las inecuaciones $y\leq 32$ e $y\geq\frac{x^2}{2}$. Se pide:

a) Dibujar la parcela.
b) Calcular el precio de la parcela si se vende a 300 € el metro cuadrado.
c) Si se quiere hacer un intercambio con otra parcela cuadrada con la misma superficie ¿cuántos metros de lado tendría el nuevo terreno?

Solución

a)

a)



b) $Área = \int_{-8}^{8}\left(32-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left(32x-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_{-8}^{8} = \frac{1024}{3}$. Precio=102400 €

c) $Lado = \sqrt{\frac{1024}{3}} = 18.47$ metros

5.- Durante una hora, una agencia de viajes vende un total de 30 billetes de avión con destino a las islas de La Palma, Gran Canaria y Lanzarote. Sabiendo que los billetes para Gran Canaria representan el doble de los emitidos para las otras dos islas, y que los correspondientes a Lanzarote son la mitad de los emitidos para La Palma más cuatro:

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Determinar el número de billetes para cada una de las tres islas.

Solución

a)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ y=2(x+z) \\ z=\frac{x}{2}+4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} y+\frac{y}{2}=\frac{3y}{2}=30 \Rightarrow \boxed{y=20} \\ x+z=10 \\ z=\frac{x}{2}+4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{3x}{2}=6 \Rightarrow \boxed{x=4} \\ \boxed{z=6} \end{array}$$

b) La solución del sistema es: $x=4, y=20, z=6$

Prueba B

1.- El 25% de las viviendas de una determinada región tienen conexión a INTERNET. Se eligen 80 viviendas de esa región y se pide:

a) Probabilidad de que al menos 20 viviendas estén conectadas a INTERNET.
b) Número esperado de viviendas no conectadas a INTERNET.
c) Probabilidad de que el número de viviendas que están conectadas a Internet esté entre 10 y 30.

Solución

$X =$ "nº de viviendas con internet en una muestra de 80"

$X \approx B(80,\ 0.25)$

$n = 80, p = 0,25, np = 20, \sqrt{npq} = \sqrt{15} = 3,8729$

$X' \approx N(20, 3.87)$

a) $P(X \geq 20) \cong P(X' \geq 20) = P(Z \geq 0) = 0,5$

b) $n^{o} = 60$

c) $P(10 < X < 30) = 1 - 2P\left(Z \geq \frac{10}{\sqrt{15}}\right) = 0,9902$

2.- La publicidad de una marca de un producto lácteo afirma que su duración es de, como máximo, 15 días después de la fecha de su fabricación. Elegida una muestra de 64 unidades de ese producto se observa que el tiempo medio de duración ha sido de 16 días con una desviación típica de 2 días:

a) ¿Se puede decir que la publicidad es correcta con un nivel de significación del 5%?
b) ¿ Se concluiría lo mismo si la desviación típica fuera igual a 4 y el nivel de confianza igual al 99%?

Solución

a) Si $\mu_0 = 15$, el contraste que se ha de plantear es:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq 15 \\ H_1 : \mu > 15 \end{array}\right\}$$

La región crítica es: $\overline{x} - \mu_0 > z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Sustituyendo: $1 = 16 - 15 > 1,645\frac{2}{8} = 0,41125$. Por tanto, se rechaza la hipótesis nula.

La resolución de este contraste se podía haber hecho de forma equivalente utilizando el estadístico de prueba, $z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ y ver si cae en la región de rechazo, que para este test unilateral es:

$R.R. = (z_\alpha, \infty) = (1.64\ , \infty)$.

$z = \frac{16 - 15}{\frac{2}{\sqrt{64}}} = 4$; como $4 \in (1.64, \infty)$, rechazamos la hipótesis nula, es decir, rechazamos $\mu = 15$.

b) Si $\alpha = 0,01$, entonces $z_\alpha = 2,32$ y $1 = 16 - 15 \leq 2,32\frac{4}{8} = 1,16$. En este caso, no se rechaza la hipótesis nula.

3.- En un estudio sobre la longevidad de los habitantes de una comunidad se contabilizan 121 personas para las que se obtiene una media de 79,5 años de vida.

a) Si se maneja una desviación típica igual a 3,5 años y un nivel de significación del 3%, construir el intervalo de confianza para la longevidad media de los habitantes de la comunidad.

b) Con la misma desviación típica del apartado anterior y con un nivel de confianza del 99%, ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea igual a 1 años?

Solución

a) Intervalo de confianza $\left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Sustituyendo:

$$\left[79,5 - 2,17\frac{3,5}{\sqrt{121}}, 79,5 + 2,17\frac{3,5}{\sqrt{121}}\right] = [78,8095,\ 80,1904]$$

b) $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0,5$; es decir $n > \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{0,5}\right)^2$, con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$, $\sigma = 3,5$. Por tanto:

$$n > \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{0,5}\right)^2 = 324,900625 \cong 325$$

4.- El precio en euros de un artículo perecedero, que empieza a venderse el primer día de un determinado mes, varía con el tiempo (en días) según la fórmula siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{t}{4} + 8 & \text{si } 0 \le t \le 4 \\ -\frac{t^2}{4} + 2t + 5 & \text{si } 4 < t \le 10 \end{cases}$$

Se pide:

a) ¿Cuál es el precio inicial del artículo?

b) Dibujar la gráfica de $P(t)$ entre el día 1 y el 10.

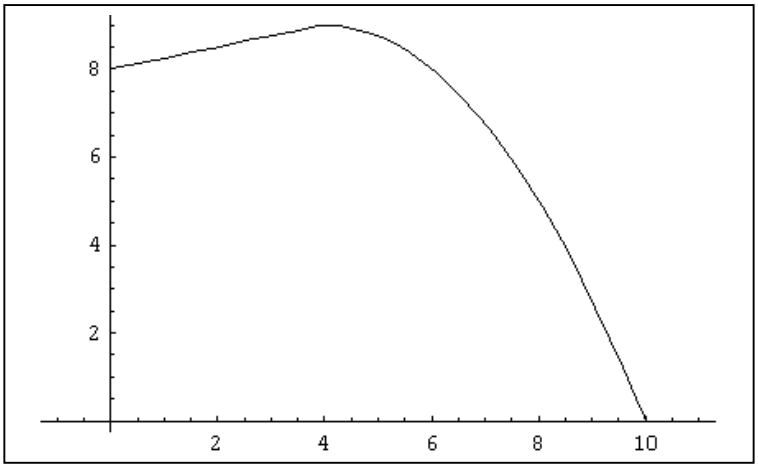
c) ¿En qué periodo de tiempo aumenta el precio?

d) ¿Cuál es el precio máximo que alcanza el artículo y en qué día se obtiene?

Solución

a) $P(0) = 8$ €

b)



c) En los 4 primeros días. $P'(t) = \frac{1}{4}$

d) El cuarto día. $P(4) = 9$.

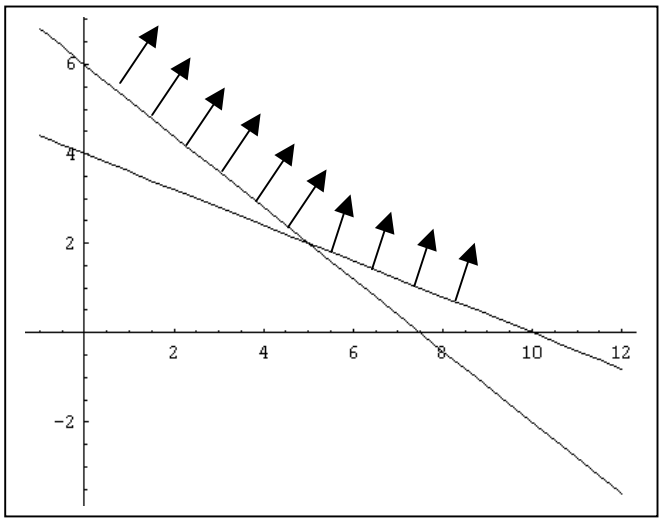
5.- Un veterinario desea dar a sus animales una dieta que contenga un mínimo de 30 unidades de pienso tipo A y 20 unidades de pienso tipo B. En el mercado se encuentran dos productos (P_1 y P_2) que se elaboran con dichos piensos. Cada bolsa de P_1, que cuesta 2,5 €, contiene 4 unidades de A y 2 unidades de B, mientras que cada bolsa de P_2 , cuyo costo es de 3,25 €, contiene 5 unidades de A y 5 unidades de B.¿Qué cantidad de P_1 y P_2 deberá comprar para que la dieta sea de coste mínimo?

Solución

Sean $p_1 =$ cantidad de P_1 (bolsas) que ha de comprar y $p_2 =$ cantidad de P_2 (bolsas) que ha de comprar.

El problema que se habrá de plantear es:

$$\begin{aligned} &\min 2,5p_1 + 3,5p_2 \\ &s.a: 4p_1 + 5p_2 \geq 30 \\ &\quad\;\; 2p_1 + 5p_2 \geq 20 \\ &\quad\;\; p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 \end{aligned}$$



La solución óptima es $p_1 = 5, p_2 = 2$. $z = 19$.