PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
L.O.G.S.E. / L.O.C.E.

CURSO 2.004-2.005 - CONVOCATORIA:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, sólo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2.5

PRUEBA A

1.-Se tomó una muestra de 120 jóvenes de los cuales 72 tenían teléfono móvil.

a) Hallar un intervalo, al 98% de confianza, para la proporción de jóvenes que tienen teléfono móvil.

b) En dicha muestra, entre los que disponían de teléfono móvil, 50 lo tenían con tarjeta prepago. Entre los jóvenes que tienen teléfono móvil, hallar un intervalo, con el 90% de confianza, para la proporción de los que lo tienen con tarjeta prepago.

Solución

a) $n = 120;\ \ \hat{p} = \dfrac{72}{120} = 0.6;\ \ \alpha = 0,02;\ \ \alpha/2 = 0,01;\ \ z_{0,01} = 2,33$

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,6 - 2,33\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{120}}, 0,6 + 2,33\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{120}}\right] = [0.495, 0.704]$$

b) $n = 72;\ \hat{p} = \dfrac{50}{72} = 0,694;\ \ \alpha = 0,1;\ \alpha/2 = 0,05;\ z_{0,05} = 1,64$

$$\left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0,694 - 1,64\sqrt{\frac{0.694(1-0.694)}{72}}, 0,694 + 1,64\sqrt{\frac{0.694(1-0.694)}{72}}\right] = [0.605, 0.783]$$

2.- Se supone que, como máximo, el 25% de los habitantes de una ciudad tienen ordenador personal. Para contrastar esta hipótesis, se elige una muestra de 400 de dichos habitantes y se detecta que 115 tienen ordenador personal.

a) Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la hipótesis de partida?

b) ¿Se daría la misma respuesta si se toma un nivel de significación igual a 0,1?

Solución

Contraste:

$H_0 : p \le 0.25 = p_0$

$H_1 : p > 0.25$

a) Región crítica:

$$\left\{\hat{p} > p_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right\} = \left\{\hat{p} > 0.25 + 2.33\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{400}}\right\} = \{\hat{p} > 0.3004459\}.$$

Como $\hat{p} = \frac{115}{400} = 0.2875$ no se rechaza H_0.

b) Región crítica:

$$\left\{\hat{p} > p_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right\} = \left\{\hat{p} > 0.25 + 1.28\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{400}}\right\} = \{\hat{p} > 0.2777128\}.$$

Como $\hat{p} = \frac{115}{400} = 0.2875$ se rechaza H_0.

3.- Se ha observado que, para velocidades comprendidas entre 25 y 175 km/hora, el consumo en litros de gasolina de un vehículo cada 100 km, realizados a la velocidad constante de *x* km/hora, se puede aproximar por la función $C(x) = 7.5 - 0.05x + 0.00025x^2$.

a) ¿A qué velocidad se obtiene el mínimo consumo? ¿Cuál es dicho consumo mínimo?

b) Haga un estudio del crecimiento y decrecimiento de la función *C*(*x*) en el intervalo [25,175]. Determine las velocidades que corresponden a consumo máximo.

Solución

a) $C'(x) = -0,05 + 0,0005x$

$C'(x) = 0 \Rightarrow -0,05 + 0,0005x = 0 \Rightarrow x = \frac{0.05}{0.0005} = 100$

$C''(x) = 0,0005 > 0$ por lo que en x=100 hay un mínimo

$C(100) = 7.5 - 0.05\cdot 100 + 0.00025\cdot 100^2 = 5$ litros es el consumo mínimo.

b) $C(x)$ es creciente cuando $C'(x) > 0 \Leftrightarrow -0.05 + 0.005x > 0 \Leftrightarrow x > 100$, es decir, $x \in (100,175]$

$C(x)$ es decreciente cuando $C'(x) < 0 \Leftrightarrow -0.05 + 0.005x < 0 \Leftrightarrow x < 100$, $x \in [25,100)$

Al no tener máximos relativos en el intervalo [25,175] el máximo hay que buscarlo en los extremos del intervalo:

$C(25) = 7.5 - 0.05\cdot 25 + 0.00025\cdot 25^2 = 6.40625$

$C(175) = 7.5 - 0.05\cdot 175 + 0.00025\cdot 175^2 = 6.40625$

4.- Una gran empresa alquila coches por semana a 400 clientes por un precio de 350€ cada coche. Si por cada 20€ que aumenta el precio de alquiler pierde 10 clientes, ¿qué precio puede poner para que la ganancia sea máxima?

Solución

Ganancia (*G*) = nº de clientes (*c*) x precio (*p*). Entonces, la función a maximizar es:

$G(x) = (400 - 10x)(350 + 20x) = 80000 + 1000x - 200x^2$

$G'(x) = 4500 - 400x = 0 \Rightarrow x = 11.25$; $G'(11.25) < 0$; $G''(11.25) = -400 < 0$.

Por tanto, la ganancia máxima tiene lugar cuando $p = 575$.

(Nota: Hubiese sido más coherente para la interpretación, que el máximo se alcanzase en un valor natural)

5.- En una competición escolar participan 1500 niños de tres categorías, alevines, infantiles y juveniles. Se sabe que los juveniles son el doble de los alevines y que, sumados los alevines e infantiles, hay 100 menos que juveniles. ¿Cuántos hay de cada categoría?

Solución

x = alevines;
y = infantiles;
z = juveniles;

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1500 \\ z=2x \\ x+y=z-100 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x+y=2500 \\ -x+y=-100 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x+y=1500 \\ x-y=100 \end{array}\right\} 4x=1600 \Rightarrow \boxed{x=400}$$

$$\boxed{y=400-100=300}$$

$$\boxed{z=2\cdot 400=800}$$

PRUEBA B

1.- El 15% de los habitantes de una determinada región son diabéticos. Se toma una muestra de 600 de esos habitantes y se pide:

a) Número esperado de habitantes que no son diabéticos.
b) Probabilidad de que el número de diabéticos sea mayor que 80.
c) Probabilidad de que el número de diabéticos esté entre 80 y 110.

Solución

a) Número esperado de habitantes que no son diabéticos =510

b) $X \sim Bi(600, 0.15) \sim N(90, 8.746)$, $p(X \geq 80) = p\left(Z > -\frac{10}{\sqrt{76.5}}\right) = p(Z > -1.14) = 0.8729$

c) $p(80 < X < 110) = p\left(-\frac{10}{\sqrt{76.5}} < Z < \frac{20}{\sqrt{76.5}}\right) = p(-1.14 < Z < 2.28) = 0.9887 - 0.1271 = 0.8616$

2.- Un productor vende paquetes de carbón para barbacoa con peso medio teórico de, cómo mínimo, 20 kgr. Para contrastar esto se toma una muestra de 9 paquetes, obteniéndose una media de 19,3 kgr. Si se supone que el peso de los paquetes sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kgr:

a) **Determinar si se puede aceptar la hipótesis con $\alpha = 0.05$.**
b) **Con un nivel de confianza del 90%, ¿qué tamaño muestral es necesario para estimar el peso medio con un error menor de 0,2 kgr.?**

Solución

a) El contraste que se ha de plantear es:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq 20 = \mu_0 \\ H_1 : \mu < 20 \end{array}\right\}$$

$\alpha = 0,05;\ \ z_{0,05} = 1,64$

La región crítica es: $\overline{x} < \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 - 1,64\frac{1}{\sqrt{9}} = 19.453$ .Como 19.3<19.453, se rechaza la hipótesis nula.

b) $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.2$; es decir $n > \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{0.2}\right)^2$, con $\alpha = 0,05;\ \ \alpha/2 = 0.025;\ \ z_{0,025} = 1,96$, $\sigma = 1$.

Por tanto:

$n > \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{0.2}\right)^2 = \left(1.64\frac{1}{0.2}\right)^2 = 67.7$, luego el tamaño muestral debe ser de al menos 68 unidades.

3.- En una muestra de 900 páginas escritas por alumnos de bachillerato, 351 tenían algún tipo de falta de ortografía.

a) Determinar un intervalo de confianza, de nivel igual a 0,95, para la proporción de páginas con faltas de ortografía.
b) Si $\alpha = 0.1$, ¿se podría rechazar la hipótesis de que, como máximo, el 38% de las páginas escritas por los alumnos de bachillerato tienen algún tipo de faltas de ortografía?

Solución

a) $\hat{p} = \frac{351}{900} = 0.39$

$$\left[\hat{p}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]=\left[0.39-1.96\sqrt{\frac{0.24}{900}},0.39+1.96\sqrt{\frac{0.24}{900}}\right]=[0.357,0.423]$$

b) Contraste:

$H_0: p \le 0.38 = p_0$

$H_1: p > 0.38$

Región crítica:

$$\left\{\hat{p} > p_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right\}=\left\{\hat{p} > 0.38+1.28\sqrt{\frac{0.38(1-0.38)}{900}}\right\}=\{\hat{p} > 0.4007\}.$$

No se rechaza H_0 ya que $\hat{p} = 0.39 < 0.4007$.

4.- La velocidad (en metros por segundo) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros, viene dada en función de los metros recorridos, *x*, por la función $f(x) = 0.00055x(300-x)$. Deducir de forma razonada:

a) ¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima?¿Cuál es esa velocidad máxima?

b) ¿Entre qué distancias su velocidad va aumentando?¿Y disminuyendo?

c) ¿A qué velocidad llega a la meta?

Solución

a)

$f'(x) = 0{,}165 - 0{,}0011x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 0{,}165 - 0{,}0011x = 0 \Rightarrow x = \frac{0.165}{0.0011} = 150$

$f''(x) = 0{,}0011 > 0$ por lo que en *x*=150 hay un máximo

$f(150) = 0.00055 \cdot 150(300-150) = 12.375$ m/s

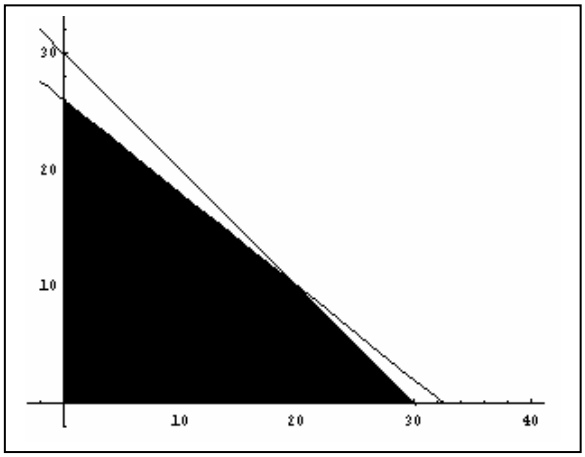
b) $f(x)$ es creciente cuando $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0.165 + 0.0011x > 0 \Leftrightarrow x > 150$, Entre 0 y 150 va aumentando y entre 150 y 200 va disminuyendo ya que $f'(x) < 0$

c) $f(200) = 0.00055 \cdot 200(300-200) = 11$ m/s

5.- Para exponer y vender, un comerciante quiere adquirir dos tipos de lavadoras, L_1 y L_2. Las del tipo L_1 cuestan 400€ y, las del tipo L_2, 500€. Sólo dispone de sitio en su almacén y expositor para 30 lavadoras y de la cantidad de 13000€ para realizar la compra. Si, en la venta posterior, gana el 25% del precio de compra de L_1 y el 22% del precio de compra de L_2, ¿cuántas lavadoras de cada tipo debe adquirir para obtener posteriormente el máximo beneficio?

Solución
El problema que debe plantear es:

$$\max 100L_1 + 110L_2$$
$$s.a: 400L_1 + 500L_2 \leq 13000$$
$$L_1 + L_2 \leq 30$$
$$L_1 \geq 0, L_2 \geq 0$$



Puntos extremos:
(0,26), (20,10), (30,0) y (0,0)
Solución óptima: (20,10), Valor óptimo =3100.