

ARCHIMEDE E IL PROBLEMA COMPLEMENTARE:
UN PONTE TRA GEOMETRIA E ALGEBRA

Il "problema complementare o ausiliario", enunciato da Archimede nel corso della quarta proposizione del secondo libro della sua *Sfera e Cilindro*, e di cui promette la dimostrazione senza che essa si trovi però nell'opera e in nessun'altra parte, consiste nel determinare, assegnati due segmenti AB ed AC e un'area S , un punto M tale che risulti:

$$AM : AC = S : BM^2. \quad (*)$$

Possiamo immaginare, per nostra comodità e per l'uso che verrà fatto nel commento di Eutocio, i punti disposti lungo una retta:



Fig. 1

oppure nella forma:

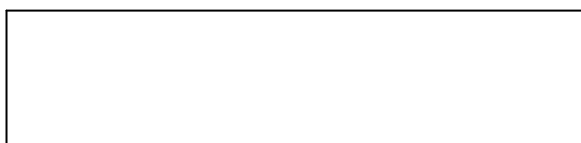


Fig. 2

Questo è uno dei problemi che, interpretati per via algebrica, conducono ad un'equazione di terzo grado alla stregua, ad esempio, del problema della trisezione dell'angolo.

Se, infatti, si considera nella figura 1 un sistema di riferimento orientato, ad esempio, da A verso B con origine in A ; indicate con 0 ; x ; c ; b le ascisse rispettivamente dei punti A ; M ; C ; B ; si ottiene:

$$x : c = S : (b - x)^2$$

che è appunto un'equazione di terzo grado in x . Da ciò la difficoltà di stabilire una costruzione geometrica capace di individuare il punto M cercato.

Il problema, infatti, non è risolubile, solamente con "riga e compasso" e cioè con la sola possibilità di tracciare rette e circonferenze. Vedremo però che la risoluzione sarà accessibile attraverso la possibilità di considerare "date" e dunque tracciabili, determinate coniche; per la parabola, ad esempio, nel caso che siano assegnati vertice, asse e parametro oppure per l'iperbole (equilatera, nel caso che interesserà a noi) nel caso che siano assegnati gli asintoti, il parametro o un suo punto.

A questo punto dobbiamo rispondere alle seguenti domande:

- (a) Come si risolve il problema complementare per via geometrica?
- (b) Quale può esser stata la via che ha portato alla dimostrazione?
- (c) Come nasce il problema?
- (d) Quali sono stati gli sviluppi algebrici del problema?

Tenendo conto dell'opera di Archimede, del commento di Eutocio, che presenta anche una dimostrazione forse dello stesso Archimede¹ e dello sviluppo algebrico, si dovrebbe seguire il percorso (c), (b), (a); (d). Noi seguiremo per maggior chiarezza espositiva il percorso (a); (b); (c); (d).

(a) Soluzione geometrica della proporzione (*) oppure dell'equivalente uguaglianza:

$$BM^2 AM = S \cdot AC. \quad (**)$$

¹ Vi sono argomenti a favore dell'attribuzione ad Archimede della dimostrazione riportata da Eutocio ed argomenti a sfavore. Personalmente consideriamo più forti i primi poiché alcune lungaggini usate nella dimostrazione non usuali nello stile sintetico di Archimede si potrebbero spiegare con il desiderio di un amanuense nel cercare di spiegare "meglio" alcuni passaggi troppo rapidi alla stregua delle aggiunte di Simplicio riguardo alle lunule di Ippocrate. Più significativo appare invece il dialetto dorico, proprio di Archimede, la dimostrazione promessa di Archimede cui abbiamo accennato e la difficoltà della dimostrazione che appare semplice solo a posteriori.

Fig. 3

A partire dalla figura 2, si costruiscano la parabola di vertice H , di asse HB e di parametro $p = S/AB$ e l'iperbole equilatera passante per B e di asintoti CA e CH . Indichiamo con K il loro punto d'incontro la cui proiezione M (vedremo che M sarà proprio il punto richiesto) risulti interno al segmento AB .

Per il fatto che il punto K appartiene alla parabola si ha (v. fig: 4):

$$KZ^2 = \frac{S}{AB} HZ^2 \quad (^)$$

cioè

$$MB^2 = \frac{S}{AB} KL. \quad (^^)$$

Per il fatto che K appartiene all'iperbole equilatera si ha:

$$KE \cdot KL = AB \cdot BH^3 \quad (^^^)$$

² Si tenga presente che, dall'antica definizione di parabola, il quadrato di un segmento condotto da un suo punto perpendicolarmente all'asse è uguale alla parte di asse determinato dal piede della perpendicolare, moltiplicato per il parametro. D'altronde si pensi di considerare nella figura 3 un sistema di riferimento cartesiano con origine in H , assi HB e HC rispettivamente come assi delle ascisse e delle ordinate; in questo caso l'equazione della parabola $y^2 = px$ calcolata in K porta proprio alla (^).

Moltiplicando membro a membro le (\wedge) e $(\wedge\wedge)$, si ottiene, semplificando:

$$MB^2 \cdot AM = S \cdot AC \quad \text{c.d.d.}$$

(b) Per osservare quale è stata la via per giungere alla soluzione vista, Archimede (o chi per lui) si serve del metodo dell'analisi, detto anche da Pappo metodo zeetetico,⁴ che consiste nel considerare già risolto il problema. In altre parole, si suppone che M sia noto e sia tale che si abbia:

$$AM : AC = S : BM^2 \quad (*)$$

Facendo riferimento alla figura n. 2 in cui M è supposto dato, si mandino da C la parallela alla retta AB e la retta CM e si indichino con H e Z i rispettivi punti d'incontro di tali rette con la perpendicolare alla AB condotta da B .

Fig. 4

³ Si pensi ad esempio di considerare nella figura 3 un sistema di riferimento cartesiano con origine in C , assi CH e CA rispettivamente come assi delle ascisse e delle ordinate. In questo caso l'equazione dell'iperbole equilatera avente per asintoti gli assi coordinati è $xy = \text{cost.}$ ove la costante è proprio il prodotto delle coordinate dei suoi punti da cui la relazione $(\wedge\wedge)$.

⁴ Pappo ne parla nelle prime righe del suo VII libro delle *Collezioni* anche se il termine verrà introdotto maggiormente dall'uso che ne farà F. Viète.

Si completi ora la figura (v. fig. 4) costruendo i punti K (punto d'incontro delle perpendicolari per Z ed M rispettivamente alle rette HZ e AB) F ed L .

Per la similitudine dei triangoli MAC e CHZ , si ha:

$$AM : AC = CH : HZ = (\text{moltiplicando per } CH) CH^2 : CH \cdot HZ$$

cioè

$$AM : AC = CH^2 : CH \cdot HZ.$$

e confrontando questa proporzione con la (*) si ha:

$$S : MB^2 = CH^2 : CH \cdot HZ:$$

vale a dire

$$MB^2 = \frac{CH \cdot HZ \cdot S}{CH^2} = HZ \frac{S}{CH} = HZ \frac{S}{AB}$$

E poiché

$$MB = KZ$$

Si ha in conclusione la (^):

$$KZ^2 = HZ \frac{S}{AB}.$$

Si può considerare pertanto il punto K appartenere alla parabola di vertice H , di asse HZ e parametro il valore noto S/AB .

Il teorema dello gnomone porta inoltre all'equivalenza dei rettangoli MH e KA ⁵ e dunque, sommando ad entrambi il rettangolo AL , all'equivalenza (^^^):

⁵ Cfr. Euclide, *Elementi*, I,43; l'equivalenza si ottiene come differenze dei triangoli uguali: CZF con CZH ; KMZ con ZMB e ACM con MCL .

$$KF \cdot KL = AB \cdot BH$$

Questo è sufficiente per indicare che K e B appartengono all'iperbole equilatera i cui asintoti siano CA e CH .

Una volta trovate le condizioni per individuare K (e quindi M) si può operare come abbiamo visto per sintesi.

(c) Ma come è nato il "problema complementare? Esso si trova inserito nella dimostrazione del problema II,4 dell'opera *Sfera e Cilindro* nel quale si chiede di «Tagliare una sfera data in modo che i segmenti sferici abbiano un dato rapporto $[k]$ ».

Fig. 5

Noi sappiamo, oggi, che il volume di un segmento sferico di altezza h , appartenente ad una sfera di raggio R è espresso dalla formula:

$$V_{\text{seg.sf.}} = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$$

In questo caso il problema di Archimede diverrebbe, indicando con V il volume della sfera assegnata:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{\frac{\pi}{3}h^2(3R - h)}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi}{3}h^2(3R - h)} = K$$

da cui segue l'equazione di terzo grado in h :

$$(K + 1)h^3 - 3R(K + 1)h^2 + 4KR^3 = 0 \quad (6)$$

Archimede, non avendo a disposizione il nostro simbolismo, si serve di un notevole risultato che stabilisce l'equivalenza tra un segmento sferico e il cono avente base uguale a quella del segmento e altezza MH (v. fig. 6) tale che sia:

$$MH : AM = (OA + A'M) : A'M \quad 6$$

Fig. 6

⁶Archimede, *Sfera e Cilindro*, II,2 oppure *Metodo*, prop. VII: «Qualunque segmento sferico è uguale al cono avente base uguale a quella del segmento e per altezza la retta che rispetto all'altezza del segmento ha lo stesso rapporto che il raggio della sfera e l'altezza del rimanente segmento [sommati insieme] hanno rispetto all'altezza del rimanente segmento [sferico]» (tr. di A. Frajese). In simboli più espliciti la condizione si può scrivere $MH : h = (3R - h) : (2R - h)$.

Dal risultato di Archimede segue che il rapporto dei due segmenti sferici V_1 e V_2 è uguale al rapporto dei due coni C_1 e C_2 equivalenti, rapporto che a sua volta, data la base comune dei due segmenti, è uguale al rapporto delle rispettive altezze (v. fig. 7).

Fig. 7

$$k = V_1/V_2 = C_1/C_2 = MH/H'M$$

con

$$MH : AM = (OA + A'M) : A'M \quad (\text{per } V_1) \quad (1)$$

$$H'M : A'M = (OA + MA) : MA \quad (\text{per } V_2) \quad (2)$$

Per fissare le idee, supponiamo $V_1 < V_2$, cioè $MA < A'M$.

Ebbene, con una serie di passaggi applicati alle (1) e (2) che esporremo tra poco, il problema diviene:

«Dati due segmenti $A'A$ e AD con $2 AD = A'A$ e il punto E in AD in modo che risulti $AD : ED = H'H : H'M$ trovare il punto M in $A'A$ tale che si abbia:

$$MD : ED : = A'A^2 : A'M^2 \gg \quad (^\circ^\circ)$$

Fig. 8

Si noti che la determinazione di E comporta:

$$\begin{aligned} ED &= \frac{AD \cdot H'M}{H'H} = \frac{AD}{H'H : H'M} = \frac{AD}{(H'M + MH) : H'M} = \frac{AD}{H'M : H'M + MH : H'M} \\ &= \frac{AD}{1+k}. \end{aligned}$$

Prima di mostrare come Archimede abbia potuto trasformare il problema iniziale nella determinazione del punto M ora vista, ci possiamo render conto dell'esattezza del risultato raggiunto tenendo presente che con: $A'A = 2 R$, $MA = h$ e con E in AD tale che sia

$ED = \frac{R}{1+k}$, la proporzione ($^\circ^\circ$) cui è giunto Archimede diventa:

$$(h + R) : R/(K + 1) = 4R^2 : (2R - h)^2$$

che è proprio l'equazione ($^\circ$).

La riduzione di Archimede⁷

La "riduzione"⁸ di Archimede consiste, come abbiamo visto, nello spostare il problema di trovare un punto M in $A'A$ tale che il rapporto $MH/H'M$ sia uguale ad un valore assegnato k [con H ed H' definiti dalle (1) e (2)], nel problema di trovare M in $H'H$ tale che con i punti D ed E verificanti le rispettive condizioni: $2AD = A'A$ e $AD : ED = H'H : H'M$ [cioè $ED = AD/(1 + k)$], si abbia:

$$MD : ED = A'A^2 : A'M^2.$$

Dalla (1),⁹ applicando note proprietà delle proporzioni si ottiene:

$$(MH - MA) : MA = (OA + A'M - A'M) : A'M;$$

$$AH : MA = OA : A'M;$$

$$AH : OA = MA : A'M;$$

$$OA : AH = A'M : MA \quad (3)$$

Analogamente, dalla (2),¹⁰ seguendo le stesse operazioni ($OA = A'O$):

$$H'A' : A'M = OA : MA;$$

$$H'A' : A'O = A'M : MA \quad (4)$$

Tenendo presente le (3) e (4) ottenute, si ha:

⁷ Seguiremo nella sostanza il testo di Archimede ma tenendo anche conto delle traduzioni operate da A. Frajese (*Opere di Archimede*, UTET, Torino, 1974, pp. 192-195), da P. Ver Eecke (*Les oeuvres d'Archimède*, Blanchard, Paris, 1960, pp. 101-105) e dell'esposizione di T. Heath (*A History of Greek Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, vol. II, 1921, pp. 43-45).

⁸ "Riduzione", ἀπαγωγή, è quella operazione matematica che trasferisce la dimostrazione di una certa proprietà a quella di un'altra proprietà da cui segue la prima.

⁹ Ricordiamo che la (1) è la proporzione $MH : AM = (OA + A'M) : A'M$.

¹⁰ Ricordiamo che la (2) è la proporzione $H'M : A'M = (OA + MA) : MA$.

$$OA : AH = A'M : MA = H'A' : A'O; \quad (5)$$

da cui, di seguito:

$$A'O : H'A' = AH : OA;$$

$$(A'O + H'A') : H'A' = (AH + OA) : OA;$$

$$H'O : H'A' = OH : A'O;$$

$$A'O : H'A' = OH : H'O;$$

$$(A'O + H'A') : H'A' = (OH + H'O) : H'O;$$

$$H'O : H'A' = H'H : H'O$$

$$H'O^2 = H'A' \cdot H'H \quad ^{11}$$

Si dividano i due membri per $H'A'^2$, per cui:

$$H'O^2 : H'A'^2 = H'H : H'A' \quad (6)$$

Si noti, inoltre, che dalla (4) si ha:

$$(A'M + MA) : A'M = (H'A' + A'O) : H'A';$$

$$A'A : A'M = H'O : H'A'. \quad (7)$$

Si tenga presente che, dovendo determinare il punto M , lo si è supposto dato in modo da coinvolgerlo con segmenti noti in modo da poterlo individuare. Nella (7) anche il punto H' dipende da M e quindi essa non è sufficiente per la sua determinazione.

Dalla (7) si ha:

¹¹ «Dunque» scrive Archimede «il quadrato di $H'O$ è equivalente al rettangolo di $H'A'$, $H'H$ » (le lettere non sono quelle di Archimede ma le abbiamo prese dall'op. cit. di T. Hesth.

$$A'A^2 : A'M^2 = H'O^2 : H'A'^2$$

che per la (6) diventa:

$$A'A^2 : A'M^2 = H'H : H'A' \quad (8)$$

Definiamo ora il punto D sul prolungamento di $A'A$, dalla parte di A , tale che sia:

$$AD = OA \quad ^{12}$$

Per la (2) si ha di seguito ($OA = AD$ per cui $OA + MA = MD$):

$$H'M : A'M = MD : MA$$

$$H'M : (H'M - A'M) = MD : (MD - MA)$$

$$H'M : H'A' = MD : AD \quad (9)$$

Si note che AD è un segmento noto, cioè dato, ed avendo supposto M dato, è dato anche il segmento MD per cui è dato il rapporto $MD : AD$ e dunque anche il rapporto $H'M : H'A'$. Come sappiamo anche il rapporto $H'H : H'M$ è un rapporto dato (uguale a $1 + k$) e si ha evidentemente:

$$\frac{H'H}{H'M} = \frac{H'H}{H'A'} \cdot \frac{H'A'}{H'M} \quad (10)$$

Tenendo presenti la (8) e la (9) questo formula (10) diventa:

$$\frac{H'H}{H'M} = \frac{A'A^2}{A'M^2} \cdot \frac{AD}{MD} \quad (11)$$

Sappiamo però, per la definizione del punto E che:

¹² Da ciò segue che $AD > AH$, infatti, poiché dalla (3) $OA : AH = A'M : MA$, essendo $A'M > MA$, avendo considerato $V_2 > V_1$, segue che $OA > AH$ vale a dire $AD > AH$.

$$AD : ED = H'H : H'M$$

cioè

$$\frac{H'H}{H'M} = \frac{AD}{ED};$$

per cui l'uguaglianza (11) diventa:

$$\frac{AD}{ED} = \frac{A'A^2}{A'M^2} \cdot \frac{AD}{MD};$$

vale a dire, semplificando:

$$MD : ED = A'A^2 : A'M^2 \quad (12)$$

Pertanto il problema di trovare il punto M da cui mandare il piano secante tale da individuare i due segmenti sferici cercati, diventa quello di trovare il punto M che verifichi la proporzione (12) con D tale che $2AD = A'A = 2R$ ed E tale che $ED = AD/(1+k)$. Si tratta proprio della proporzione (°°) che avevamo già indicata come "riduzione" del problema II,4 della *Sfera e Cilindro* di Archimede.

Ma Archimede rende ancora più generale la proporzione (°°) da trovare estendendola a quel problema che vien detto comunemente il "problema complementare o ausiliario" che, come sappiamo consiste nel: «Trovare nel segmento dato AB un punto M in modo che assegnata un'area S e un punto C , si abbia $AM : AC = S : BM^2$ » (v. fig. 1).

Infatti una volta risolto il "problema complementare" è possibile risolvere anche il più particolare problema indicato dalla (°°) con le seguenti sostituzioni che trasformano la (*) nella (°°):

$$A \rightarrow D; \quad B \rightarrow A'; \quad C \rightarrow E, \quad A \text{ preso in modo che } A'A = 2AD$$

Fig. 9

In questo modo AM diventa DM ; AC diventa DE ; S è una qualsiasi area assegnata e BM^2 diventa $A'M^2$ (fig. 9).¹³

Siamo ritornati al primitivo "problema complementare" ed abbiamo così chiuso il ...cerchio del ragionamento.¹⁴

(d) Abbiamo visto che il problema iniziale $V_1/V_2 = K$ (anche quando si traduce nella proporzione vista $MD : ED = A'A^2 : A'M^2$ o nella più generale $AM : AC = S : BM^2$) si collega con un'equazione di terzo grado. Di questo non ebbero sentore, però, né l'Archimede della *Sfera e Cilindro*, né il probabile Archimede che risolve il "problema complementare" e neppure Eutocio che riporta tale dimostrazione e le altre di Dionisodoro (III-II secolo a. C.) e di Diocle ("50-100 a. C.).

Furono gli Arabi a riprendere il problema e, ignorando le soluzioni che Eutocio aveva riportato, lo affrontano traducendolo però in un problema algebrico.

Così racconta Omar Khayyam (XII secolo) nella *Introduzione* della sua *Algebra*.

«Riguardo ai moderni, uno di questi, al Mahani, concepì l'idea di analizzare il teorema ausiliario impiegato da Archimede nella quarta proposizione del secondo libro del suo trattato sulla sfera e cilindro; quel teorema che lo condusse alla fine ad un'equazione contenente cubi, quadrati e numeri di cui non giunse a soluzione. Dopo lunga meditazione si dichiarò allora che era impossibile risolvere questa equazione, fino alla comparsa di Abu-Ja'far al Khazin che vi arrivò per mezzo delle sezioni coniche»

¹³ Il secondo segmento della figura 9 è il medesimo di quello della figura 8 a parte la sua inversione o, se si vuole, l'inversione di tutti i suoi punti.

¹⁴ Dei due casi, quello generale e quello particolare, Archimede promette di dare dimostrazioni: «e per ciascuno di questi» scrive infatti «verranno date alla fine analisi e sintesi».

Notiamo che anche l'arabo al Haytam (Alhazen) aveva ottenuto il medesimo risultato e Omar Khayyam stesso risolve i vari tipi delle equazioni di terzo grado mediante intersezioni tra coniche.

Costruire segmenti che risolvono le equazioni non vuol dire però riuscire a calcolare le soluzioni per via algebrica, ma ottenere solo valori approssimati poiché approssimate sono le misure dei segmenti. È necessario per questo ottenere formule risolutive radico-razionali che possano consentire il loro uso nel calcolo e consentire inoltre la possibilità di ottenere l'approssimazione spinta a piacere.

Questo passo decisivo sarà però raggiunto solo dagli algebristi italiani Scipione Dal Ferro (1465-1526), Tartaglia (1500/06-1556), e Girolamo Cardano (1501-1576). Saranno essi, ma sarebbe lungo raccontare tutti gli avvenimenti che li coinvolsero nella scoperta,¹⁵ che, prima riescono a portare ogni equazione di terzo grado nelle forme:

$$x^3 + q = px; \quad x^3 + px = q; \quad x^3 + q = px.$$

e poi risolvendo queste mediante formule risolutive radico-razionali e non costruendo segmenti tali da risolvere le equazioni come aveva già fatto, ad esempio, Omar Khayyam.¹⁶

Ad esempio, nel primo caso, che è quello che si presenterebbe nell'equazione relativa al "problema complementare", si ha:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

¹⁵ Cfr. a questo proposito S. Maracchia, *Da Cardano a Galois. Momenti di storia dell'Algebra*, Feltrinelli, Milano, 1979, cap. I.

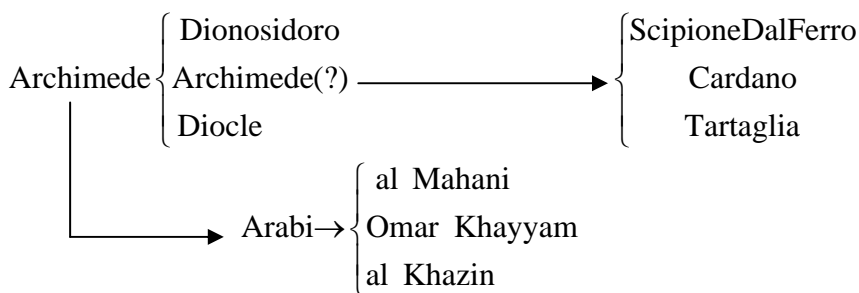
¹⁶ La costruzione di segmenti la cui misura risolverebbe determinate equazioni, consente solo un'approssimazione della soluzione cercata legata inoltre alla più o meno esattezza di una figura. Le formule radico-razionali consentono, invece, un'approssimazione sempre più spinta dovuta all'algoritmo dell'estrazione delle radici oltre che alla possibilità di operare con le soluzioni ottenute.

Termino questo articolo ricordando che anche Cardano, come aveva fatto anche Tartaglia,¹⁷ mostra come è possibile costruire un segmento risolvete una particolare equazione di terzo grado e dichiara esplicitamente di aver tratto lo spunto della sua costruzione proprio dal commento di Eutocio: «*Questo ci ha insegnato di fare*» scrive prima di affrontare la costruzione «*Eutocio di Ascalona due volte nel [commento del] secondo libro della Sfera e Cilindro, ma è sufficiente riportare la sua prima dimostrazione*».¹⁸

Cardano si riferisce proprio alla costruzione attribuita ad Archimede; egli evidentemente non conosce i matematici arabi, conosce però il commento di Eutocio che questi ignoravano.

Noi oggi che abbiamo la fortuna di conoscere quasi tutte le opere di Archimede, il commento di Eutocio, *l'Algebra* di Omar Khayyam e le opere di Cardano, possiamo ben valutare l'importanza che ebbe nello sviluppo dell'algebra il problema geometrico enunciato da Archimede e possiamo concludere osservando che spesso hanno causato maggior stimolo allo sviluppo della matematica i problemi rimasti aperti piuttosto che grandi risultati raggiunti e completamente esaminati.

Silvio Maracchia



¹⁷ Tartaglia, *General Trattato*, sesta parte della *Terza parte*, quesito 47.

¹⁸ Cardano, *De regula Aliza Libellus*, cap. XII: *De modo demonstrandi geometricé aestimationem [Capituli] cubi et numeri aequalium quadratis*, pp. 389-390 del volume IV dell'opera omnia, Lugduni, Sumptibus I. A. Huguetan & M. A. Ravaud, 1663.