El significado filosófico de las matemáticas en la cultura griega

Sergio Toledo Prats

Voy a resumir algunos aspectos de la actividad matemática griega, durante los tres siglos y medio que separan a Tales de Mileto de Arquímedes de Siracusa. Me sitúo en la perspectiva defendida por Oswald Spengler en *La decadencia de Occidente,* brillantemente desarrollada por Jacob Klein en *El pensamiento matemático griego y los orígenes del Álgebra,* a saber: que cada cultura tiene su propia matemática. Lo que implica que los significados, funciones, finalidades y métodos del quehacer matemático deben ser interpretados desde dentro de la cultura en que tienen lugar, y por tanto, en conexión con otros elementos de ella, al menos si pretendemos tener una perspectiva histórica. Así pues, no es posible trasponer sin más los conceptos y procedimientos de los matemáticos griegos a nuestra cultura, a la matemática occidental iniciada en el siglo XVII, como si hubiera una continuidad sin fisuras de su sentido, de su forma, de su valor. De modo que voy a comentar algunos avateres de la matemática griega en relación a otro saber con el que estuvo muy vinculada: la filosofía.

Tales y la escuela de Pitágoras

Se suele considerar que la gran aportación de los matemáticos griegos fue transformar la matemática empírica de civilizaciones anteriores, como la mesopotámica o la egipcia, en una matemática teórica, es decir, en un saber que prueba o demuestra sus construcciones por deducción a partir de un conjunto de axiomas, postulados, definiciones. Ello fue resultado de un largo proceso que lleva desde Tales hasta Euclides de Alejandría. La insistencia de las fuentes antiguas en los viajes de Tales y Pitágoras por Egipto y Mesopotamia no es sino un reconocimiento de la deuda de las matemáticas griegas con los egipcios, los fenicios y los babilonios. Este reconocimiento alcanzaba, probablemente, no sólo a las matemáticas prácticas difundidas en Grecia por mercaderes o artesanos extranjeros, sino a un corpus de conocimiento más organizado que requería el aprendizaje in situ.

Parece ser que la primera historia de las matemáticas fue escrita por Eudemo de Rodas, hacia el 330 a.n.e., a petición de su maestro Aristóteles, como parte de un vasto plan para recopilar algunos saberse consolidados, a ejecutar por los miembros del Liceo. Debemos recordar que una primera dificultad que enfrentan los historiadores actuales de la matemática preeuclidiana es la carencia de los textos originales, ya que no se han conservado obras anteriores a la época helenística, y las de esa fecha se conservan como manuscritos copiados en plena Edad Media por bizantinos y árabes. Una segunda dificultad es la falta de información acerca de la transmisión oral del conocimiento matemático, tanto respecto a los procedimientos de trabajo como respecto a la difusión de resultados obtenidos, factor nada desdeñable si tenemos en cuenta que la escritura no se populariza en las capas cultas de las polis helenas hasta los tiempos de Platón.

Aunque la obra de Eudemo se perdió, algunos fragmentos sobrevivieron, copiados por autores posteriores, como Gémino o Proclo. Por eso sabemos que en ella se otorgaba a Tales el honor de ser el primer matemático griego. Los cinco teoremas cuya demostración se le atribuye inclinan a pensar que dichas demostraciones debían ser aún parcialmente empíricas, muy apoyadas en lo visual, en la igualdad por simetría o superposición de figuras; desde el punto de vista lógico quizá se apoyaban en una especie de "principio de razón suficiente", de modo que una tesis argumentada debía aceptarse si no había un contraejemplo o un contraargumento mejor. Sin embargo, encontramos ya en Tales el primer paso hacia la matemática teórica: el paso de lo particular a lo universal. En un teorema tan sencillo para nosotros como el de que el diámetro divide al círculo en dos partes iguales encontramos la conversión de cualquier posible figura empírica circular en la figura teórica "círculo", haciendo abstracción de sus distintos tamaños y de su disposición en el espacio; lo mismo ocurre con la conversión de todos los diámetros posibles en la figura "diámetro"; e igualmente queda definida la figura "centro". O sea, todos los círculos son el círculo, todos los diámetros son el diámetro y todos los centros son el centro. La pluralidad es sintetizada en unidad mediante la definición de las propiedades inherentes a esas figuras.

Quien probablemente inició el camino idiosincrático de las matemáticas griegas fue Pitágoras, a partir de la fundación de su secta en Crotona hacia el 525 a.n.e. Sus principales doctrinas religiosas fueron la reencarnación y la inmortalidad de las almas de todos los seres vivos. Los pitagóricos le imprimieron una dimensión mística a las matemáticas, porque constituyen la esencia de la Naturaleza y son, por tanto, un saber sagrado. Los números y las figuras son –y nos permiten comprender– la razón fundante de los seres físicos. A sus ojos la prueba es clara: las matemáticas proporcionan verdades eternas, por tanto, verdades divinas, cuyo origen no es humano, pues todo lo humano está sujeto al cambio y la corrupción. Excepto el alma, precisamente. Si tenemos en cuenta que para los griegos hay una equivalencia entre ser y pensar, entre la physis y el logos, comprendemos mejor la correlación entre la inmortalidad del alma y las verdades eternas. Aunque para los primeros pitagóricos ni los números ni las figuras existen separados de los objetos que cuentan y modelan, la idea de "propiedad matemática eterna" hará emerger el concepto de "verdad" como categoría fundamental del logos, con una fuerza cuasidivina, como podemos comprobar viendo la persistencia de la idea de "verdad eterna" en el pensamiento teológico, filosófico y científico de Occidente hasta ayer mismo.

La teoría física pitagórica es consecuente: se basa en la tesis de que "las cosas son números". Consideran que las cosas están formadas por una cantidad determinada de partículas, todas iguales entre sí, como si fueran una especie de puntos materiales, con dimensión. Las propiedades de las cosas dependerían del número de partículas y de su configuración geométrica. Así pues, los pitagóricos son los primeros atomistas griegos. La profunda vinculación que establecieron entre aritmética y geometría ha motivado que algunos historiadores de la ciencia denominen este período inicial de la matemática pitagórica como aritmogeometría.

Probablemente entre el año 500 a.n.e. y el 470 a.n.e. los pitagóricos descubrieron la existencia de magnitudes inconmensurables, al estudiar la relación entre el lado y la diagonal del pentágono regular, o bien, del cuadrado. Una vieja leyenda da pie a pensar que el descubridor pudo haber sido Hípaso de Metaponto. Esto arruinaba la creencia pitagórica en que todo lo existente podía ser medido por el número, que todas las magnitudes podían ser expresadas como razón entre números. Dos consecuencias de interés fueron la creciente importancia de la geometría, en detrimento de la aritmética, y la sustitución, hacia mitad de siglo, del atomismo matemático pitagórico por el atomismo físico de Leucipo y Demócrito.

Fue una suerte para el devenir de las matemáticas que hacia el 450 a.n.e. los pitagóricos fueran expulsados de Crotona por motivos políticos. De ese modo se diseminaron por las polis helenas, convirtiéndose en profesores de matemáticas. Los lazos entre sus miembros se irían debilitando, aunque conocemos comunidades activas todavía a principios del siglo IV a.n.e. Los residuos de la secta desaparecen hacia el 300 a.n.e., justo por la época en que Euclides de Alejandría va a recoger en sus *Elementos* buena parte de la herencia pitagórica en geometría y aritmética. La pretensión pitagórica de que las matemáticas son conocimiento verdadero plantea dos cuestiones que serán trabajadas y debatidas durante los siglos V y IV a.n.e.: el método matemático y la ontología de los conceptos matemáticos.

Método y Ontología en Matemáticas

Respecto al método señalemos que los historiadores no concuerdan en si la demostración deductiva fue inventada por los pitagóricos y desarrollada por los filósofos eléatas o viceversa. Aunque se suele considerar que su origen remoto se halla en la retórica judicial, el documento más antiguo conservado con razonamientos deductivos es el *Poema* de Parménides de Elea, escrito hacia el año 480 a.n.e. En él se expone una cosmología basada en un principio: lo Uno, lo único que es. Mediante deducción se van probando las propiedades fundamentales de lo Uno: que no tiene principio ni fin en el tiempo, que es inmutable, inmóvil, homogéneo, continuo y limitado; se afirma además que es esférico. Esta cosmología ataca dos aspectos del pitagorismo: no acepta que haya dos principios fundamentales –lo lleno y lo vacío– reduciéndolos al primero, y rechaza su pluralismo atomista. Las demostraciones son indirectas, por reducción al absurdo. En vez de razonar a partir de la tesis que se quiere demostrar se parte de la antítesis hasta llegar a una contradicción, lo que nos permite rechazar la antítesis, por el principio de no contradicción, y afirmar la tesis, mediante el principio de tertio excluso. Pues bien, Euclides ha conservado en los libros de aritmética de los *Elementos* un conjunto de teoremas demostrados por reducción al absurdo y que son de procedencia pitagórica. Entre ellos están los teoremas acerca de los números pares e impares, que se consideran anteriores al 450 a.n.e.

Se atribuye a Hipócrates de Quíos –que usó la reducción al absurdo en su cuadratura de las lúnulas– la redacción de los primeros *Elementos,* hacia el 435 a.n.e., es decir, el primer ensayo de presentar el saber matemático partiendo de unos principios definidos. El término “elemento” significaba por entonces “aquello a partir de lo que se construye algo”, o bien “aquello simple en que se resuelve lo complejo”. Ni esos *Elementos,* ni los posteriores de León o de Teudio, se han conservado, eclipsados por los de Euclides, que hacia el año 300 a.n.e. convirtieron en canónica la forma de presentación de los conocimientos matemáticos a partir de axiomas o postulados, nociones comunes y definiciones. A partir de los *Elementos* de Hipócrates se debió ir abriendo paso la distinción temática entre construcción de figuras –característica de la matemática pitagórica– y la demostración de teoremas. Lo mismo debió ocurrir con la distinción entre análisis y síntesis. Esta se consagró como método de exposición del conocimiento matemático, de modo que partiendo de los principios establecidos se llegaba, mediante una serie de pasos, hasta la tesis a demostrar, quedando su verdad demostrada como consecuencia necesaria de los principios. El análisis, cuya invención atribuye Proclo a Hipócrates, y que sería explicado más tarde por Platón en su *República* (VI, 511 a), consiste en el camino inverso. Suponiendo resuelto el problema hay que derivar deductivamente consecuencias que nos lleven hasta los principios, que permiten luego justificar esa solución porque son condición suficiente y necesaria para ello.

La cuestión ontológica presenta más dificultades. Los primeros pitagóricos habían considerado la línea como una yuxtaposición de puntos, la superficie como una yuxtaposición de líneas y el cuerpo sólido como una yuxtaposición de superficies, siendo todos ellos –puntos, líneas, superficies y sólidos– entes materiales. Tras el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables debieron intentar soslayar el problema mediante la teoría de la fluxión: una línea es un punto que fluye hasta otro punto, etc. Pero en contra de ello, las aporías de Zenón de Elea, hacia el 450 a.n.e., trataron de demostrar que el espacio no existe, que ni los cuerpos sólidos ni las líneas son conjuntos de puntos, y que los conceptos de espacio y movimiento no sirven para la investigación de la Naturaleza, porque producen contradicciones al pensar, tanto si se los considera como continuos o como discontinuos.

Poco después, hacia el 435 a.n.e., en la Atenas de Pericles, Anaxágoras intentará refutar esas aporías estableciendo un cierto principio de continuidad, al afirmar que no existe lo más pequeño entre los más pequeño, ni lo más grande entre lo más grande, o sea, que toda magnitud puede seguir siendo dividida hacia lo mínimo de modo ilimitado o creciendo hacia lo máximo en un proceso sin fin. Anaxágoras fue uno de los filósofos –junto a Empédocles, Leucipo y Demócrito– que, para hacer compatibles la lógica parmenídea del ser y el no ser con la evidencia de los cambios en la Naturaleza, ofrecieron soluciones pluralistas para la composición de las cosas, uniendo el concepto físico de mezcla con el concepto matemático de proporción.

Las matemáticas ideales, la democracia ateniense y Platón

Después de Zenón, los matemáticos avanzan hacia la consideración de los conceptos matemáticos como referidos a entes ideales no materiales. No será sin discusión, pues hay resistencia contra esos entes matemáticos doblemente idealizados: sin materia y sin dimensión. Algunos sofistas, entre el 450 a.n.e. y el 400 a.n.e., no sólo pondrán en duda la validez de los principios matemáticos, sino también la pertinencia del propio método deductivo, y querrán hacer valer los derechos de lo empírico frente a lo teórico, del conocimiento sensible frente al conocimiento lógico. Ello se ve, por ejemplo, en la discusión de Protágoras acerca de que la tangente no toca sólo en un punto al círculo, o en los procedimientos de Antifonte y Brisón para cuadrar el círculo mediante la inscripción y circunscripción de polígonos de un número cada vez mayor de lados, o incluso, en las comparación de las superficies de corte de un cono por un plano, por el atomista Demócrito.

La implantación de la democracia en Atenas, hacia mediados del siglo V a.n.e., trajo consigo el debate público acerca de la educación. Algunos sofistas rechazaron que se eneñara matemáticas por su inutilidad práctica; otros filósofos, como Aristipo, las recusarán porque con ellas no se aprende ética, no ayudan a formar ciudadanos virtuosos. Esta época ve consagrarse como método de producción del saber el diálogo polémico que busca refutar a los demás interlocutores para triunfar imponiendo el discurso propio.

Platón (427-347 a.n.e.) inventa la escritura filosófica imaginando ese tipo de diálogo –aunque con una finalidad retórica de consenso– entre Sócrates y sus interlocutores. Entre ellos, algunos sofistas, a quienes Platón –el gran paladín de la matemática idealizada– execrará acusándolos de confundir los números abstractos o las figuras geométricas ideales con las apariencias físicas sensibles; pero como ya hemos expresado, no se trata de una confusión, sino de una opción diferente a la de Platón. A pesar del vuelo místico de las matemáticas platónicas, recordemos que D. H. Fowler, en su obra *Mathematics in Plato's Academy* ha demostrado de manera convincente la importancia fundamental de la antiféresis o sustracción mutua, método de origen empírico para determinar la relación entre dos magnitudes, tanto en la Academia como en matemáticos anteriores y posteriores. Platón funda la Academia en el año 387 a.n.e. y en ella trabajarán matemáticos de renombre como Teeteto, a quien se atribuye buena parte de los libros X y XIII de los *Elementos* de Euclides, y Eudoxo, quien con su teoría de las proporciones y su método de exhaución, recogidos en los libros V y XII de los *Elementos,* solucionará el tratamiento de las magnitudes inconmensurables. Además, Platón, en sus viajes a Sicilia, recibirá la influencia de importantes matemáticos pitagóricos, a través de los escritos cosmológicos de Filolao y los trabajos de Arquitas de Tarento.

La piedra angular de la filosofía platónica es su teoría de las Formas o Ideas. Con ella pretende explicar la existencia de los seres naturales como copias de arquetipos únicos externos a la Naturaleza. Cada conjunto de seres naturales semejantes, que podemos conocer mediante los sentidos y denominamos con un mismo concepto, deben su existencia y sus caraterísticas comunes a su Forma arquetipo, conocida exclusivamente mediante la razón. Las Formas mencionadas son: formas de especies naturales, formas de virtudes morales, formas de conceptos matemáticos. En *República,* donde plantea esa división entre seres sensibles e inteligibles, Platón expone que estos últimos son de dos tipos: las Formas y los entes matemáticos, como números y figuras. Esto da lugar a dos tipos de conocimiento epistémico: el saber noético o dialéctica, que consiste en la intelección de las Formas, y las ciencias matemáticas, que usan el razonamiento discursivo. La superioridad del primero sobre el segundo estriba en que demuestra todos sus principios, mientras que las matemáticas se fundan en postulados indemostrables. Para Platón, los entes matemáticos juegan el papel de intermediarios entre las Formas y los seres naturales.

Pero en escritos posteriores se irá diluyendo esa separación entre Formas y entidades matemáticas, pues usará cada vez más conceptos matemáticos para tratar de conseguir su objetivo fundamental: presentar una jerarquización de los principios de todo lo que existe. Para ello usa el método de generalización y división. Veamos algunos claros ejemplos. En *República* la Forma suprema es el Bien, pero en *Las Leyes,* su obra postrera, será la de Unidad. Cuando presenta su cosmología en el *Timeo,* adjudica a las partículas que componen los cuatro elementos físicos –tierra, agua, aire y fuego– formas de poliedros regulares –hexaedro, icosaedro, octaedro y tetraedro. Curiosamente su atomismo geométrico se basa en una combinatoria de las superficies de los poliedros, no de sus volúmenes. Ahí mismo distingue tres géneros de ser: las Formas eternas inmutables, el Espacio –ser inteligible, receptáculo de todo lo que nace y perece– y los seres naturales. Los principios primeros que explican la existencia de los seres naturales son la Unidad y la Díada –díada que es lo Grande y lo Pequeño. Asimismo en *El Sofista* presenta como géneros supremos cinco: el ser, el reposo y el movimiento, lo igual y lo desigual. En el *Teeteto* se afirma que tras percibir las sensaciones el alma compara y distingue lo semejante y lo diferente: esa reflexión constituye la ciencia. Convencido de que las matemáticas expresan la necesidad de la verdad, Platón llegará a decir en *Las Leyes* que *"los dioses no se resisten ni luchan contra las matemáticas"*. Hay indicios de que pudo elaborar una teoría de los números ideales, que no llegó a escribir, donde asociaba las Formas fundamentales a los números de la Década, siguiendo una tradición pitagórica.

De modo consecuente, Platón propone en *República* que los jóvenes destinados a futuros gobernantes de la polis ideal estudien, entre los 20 y los 30 años, las cinco ciencias matemáticas, en orden creciente de complejidad: aritmética, geometría, estereometría, astronomía y armonía. Luego habrán de estudiar dialéctica cinco años. Según Isócrates, los platónicos usaban las matemáticas para entrenarse en el conocimiento abstracto y en la técnica deductiva. Todas esas ciencias admiten un uso teórico –que Platón considera superior– y un uso práctico, por su utilidad para el comercio, el arte de la guerra, la navegación, la medicina, etc. Por ello criticará a Arquitas, por usar las matemáticas para la mecánica, y al propio Eudoxo, por no limitarse a la astronomía matemática.

Es muy probable que fuera a petición de Platón por lo que Eudoxo, hacia el 355 a.n.e., elaboró el primer modelo astronómico matemático del movimiento del Sol, la Luna, los planetas y la esfera de las estrellas fijas: la teoría de las esferas homocéntricas. Esto constituye toda una novedad, pues la palabra "planeta" significa "errante" y Eudoxo les va a poner a esos vagabundos del espacio una camisa de fuerza matemática. Esta conversión de los cielos en el reino de la regularidad permitirá luego a Aristóteles separar la zona supralunar –incorruptible e inmutable– de la zona sublunar –corruptible y cambiante.

Aunque Platón no fuera un matemático de relieve, en sus obras toma una posición clara respecto a la cuestión ontológica. Los números y las figuras son entidades ideales, inteligibles, eternas, inmutables, independientes y separadas de los seres naturales. Niega entidad a los puntos, a los que considera simplemente extremos de líneas, y afirma que las entidades ideales son la línea, la superficie y el sólido. Respecto a los números, según fue envejeciendo, se fue haciendo más pitagórico. En el *Filebo* dirá que el Número es el principio intermedio entre lo Uno y lo Ilimitado. Aristóteles señala que Platón distinguía tres tipos de números: los sensibles, que cuentan las cosas, los matemáticos, conjuntos de mónadas o unidades, y los ideales, como la díada o la tríada, siendo cada uno de estos últimos una especie diferente.

En definitiva, con Platón las matemáticas se reafirman en la dimensión cosmológica y sagrada adquirida con los pitagóricos, yendo incluso "hyperouranos". Los números y figuras son los principios eternos que gobiernan la Naturaleza cambiante y mortal. Las matemáticas expresan el orden de la necesidad, la verdad sobre el mundo, comprensible sólo por el alma racional, no por el cuerpo sensible. Al final de su vida llega a proponer como religión popular de la polis racional ideal una teología astral que se funda en la astronomía matemática.

Las matemáticas y Aristóteles

No es extraña, entonces, la queja de Aristóteles:

> Las matemáticas se han convertido hoy en filosofía, y en toda la filosofía, por más que se diga que su estudio no debe hacerse sino en vista de otras cosas.

El estagirita va a realizar una nueva clasificación de las ciencias. Las ciencias teóricas son las de valor superior, y en orden decreciente de importancia son: filosofía primera, matemáticas y física. Luego vienen las ciencias prácticas, como ética, política, economía, retórica. Finalmente las ciencias productivas, como medicina, navegación, arquitectura, etc. Enumeraré algunos de los presupuestos que sostienen esa jerarquía. Las ciencias de los entes inteligibles son superiores a las de los entes materiales. Las ciencias que parten de principios son más rigurosas que las que no lo hacen. La aritmética es más exacta que la geometría porque se basa en menos principios.

En los *Analíticos Primeros*, donde explica su lógica silogística, y en *los Analíticos Segundos*, donde expone su teoría de la demostración y la definición, Aristóteles va a establecer el canon para el conocimiento científico. La silogística tuvo poco éxito como método de exposición o de justificación del conocimiento, a pesar de su rigor lógico; en cambio, su epistemología tuvo mayor influencia, aunque ni siquiera el propio autor se atuvo demasiado a ella en sus obras, usando con frecuencia procedimientos descriptivos y argumentos retóricos que no se atienen estrictamente al método proclamado. Demostrar es razonar a partir de lo necesario, no simplemente a partir de lo verdadero. Toda ciencia demostrativa ha de constar de principios indemostrables –propios o comunes–, aserciones de existencia –hipótesis– y definiciones. Para defender las ciencias Aristóteles refuta tanto a quienes niegan certeza al conocimiento por la supuesta necesidad lógica de un retroceso ad infinitum en la justificación de los principios como a quienes intentan demostrarlos de modo circular. Por ello rechaza la posición platónica de que la dialéctica demuestra todos sus principios, aduciendo –en contra de un proceder típico de su maestro– que una definición no sirve como demostración, pues hay que probar que corresponde a una realidad.

Cada ciencia tiene su propio objeto de estudio y su propio método. Por eso no se puede demostrar nada saltando de una ciencia a otra

> excepto [aplicando] los principios geométricos a las cuestiones mecánicas u ópticas, y los principios aritméticos a las armónicas (An. Pos., 1076 a).

Y continúa diciendo

> No debe exigirse rigor matemático sino para objetos inmateriales. Y así el método matemático no es el de la física, porque la materia es el fundamento de la Naturaleza.

Las demostraciones producen verdades eternas; así lo expresa con un ejemplo:

> La conmensurabilidad entre lado y diagonal no es en el tiempo, ni tampoco la inconmensurabilidad; una por no ser nunca, la otra por ser siempre.

Aristóteles es un pensador finalista: todo se produce en vistas a una finalidad que es el Bien. El conocimiento es una de las formas del bien. Aplicado esto a las matemáticas significa que en ellas todo conocimiento tiene causa formal y causa final. La primera consiste en que todo conocimiento nuevo se produce a partir de conocimientos preexistentes; la segunda estriba en el teorema, prueba o construcción, buscado por el razonamiento matemático.

Respecto al tema ontológico, para Aristóteles los principios matemáticos ni son principios internos de los cuerpos físicos –como sostenían los pitagóricos– ni son principios externos –como sostenía Platón. Tampoco los considera sustancias, o sea, algo capaz de subsistir por sí mismo. Son para él formas abstraídas de los cuerpos físicos. Por ello prefiere definir los puntos, líneas y superficies de modo relativo: como límites o divisiones. Hoy nos resulta chocante a simple vista su definición del lugar como superficie envolvente de un cuerpo. Para comprenderla hay que darse cuenta de que Aristóteles está intentando soslayar las discusiones ontológicas sobre el espacio, provenientes de las teorías de Parménides y Zenón. No quiere mezclar con su física la idea matemática de un espacio homogéneo, sin cualidades. Su espacio es pleno, heterogéneo y cualitativo. Siguiendo la estela eleática en la física aristotélica no existe el vacío, cada cuerpo tiene su lugar natural y el conjunto de los lugares ocupa plenamente el espacio.

En diversos puntos de su obra Aristóteles intenta refutar las paradojas de Zenón para afianzar los conceptos matemáticos fundamentales. Para ello introducirá la distinción entre infinito actual e infinito potencial. No hay infinito físico ni matemático actual, es decir, como realización efectiva, como algo presente. En cambio, tanto la magnitud como los números son infinitos potenciales, aunque con simetría inversa. Los números son potencialmente infinitos hacia lo grande, pero hacia lo pequeño tienen su límite en la Unidad. Las magnitudes son potencialmente infinitas hacia lo pequeño, pues al ser continuas pueen ser divididas sin fin, pero tienen un límite hacia lo grande: la esfera de las estrellas fijas, donde acaba el universo. De ese modo representa Aristóteles lo matemático en el marco de lo físico; si bien las matemáticas tienen la prioridad lógica, a la física corresponde la prioridad ontológica.

Respecto a los números aceptará la idea pitagórica de que la Unidad es el principio de los números, justificándolo porque contar implica siempre disponer de una unidad de cuenta. Por tanto, para él la Unidad no es un principio común de los cuerpos físicos –como era para los pitagóricos– sino su medida. Euclides recogerá más tarde esta idea del número como medida en sus definiciones del libro VII de los *Elementos.*

Digamos en conclusión que en el camino del consenso matemático en torno a principios y métodos Aristóteles representa un paso adelante: la retórica persuasiva de los diálogos de Platón se ve sustituida por una lógica expositiva basada en principios, definiciones y demostraciones, que quiere convencer sin dejar lugar a dudas. Con la mirada de un profesional del saber quiere poner orden en el abanico de las ciencias. La lógica será el instrumento necesario para todas las ciencias. Estas serán clasificadas y jerarquizadas. Cada una tendrá que especificar sus principios propios y los que comparte con otras ciencias. Se trata de evitar confusiones de método en el tratamiento de los objetos de investigación y de evitar incoherencias en el método de exposición. A pesar de que hoy los practicantes de las ciencias podamos reconocernos en esta mirada técnica más que en la de sus predecesores, Aristóteles conserva respecto a las matemáticas algunos ideales típicos de la cultura griega, como la perspectiva ética y estética, que no aparecen con mucha frecuencia en la filosofía actual de las matemáticas. Por ejemplo, en su *Metafísica* dirá que

> incurren en error los que pretenden que las ciencias matemáticas no hablan ni de lo bello ni del bien. De lo bello es de lo que principalmente hablan y lo bello es lo que demuestran.

Esta belleza reside para él en el orden, la simetría, la limitación y la proporción.

La ciencia helenística y los “Elementos” de Euclides

Discuten los historiadores de la ciencia cuál haya podido ser la influencia de la Academia y el Liceo sobre el desarrollo de la ciencia helenística. Señalemos ante todo que la oposición entre Platón y Aristóteles no fue tan marcada en el mundo antiguo como lo será en Europa a partir de la filosofía escolástica de los franciscanos y los dominicos, que enfrentarán versiones cristianizadas de ambos. Pero basta estudiar las culturas bizantina y árabe, correspondientes a nuestra Edad Media, para ver qué estrechamente cohabitan maestro y discípulo. Los Antiguos verán, en general, la obra de Aristóteles como una continuidad con variaciones de la obra de Platón.

En lo que respecta a las matemáticas es obligado hablar de Euclides, que entre el 300 a.n.e. y el 280 a.n.e., compiló sus *Elementos* en Alejandría. Esta obra no pretende ser ni un tratado exhaustivo sobre las matemáticas anteriores, ni siquiera un resumen de los hallazgos más valiosos. Los *Elementos* es una obra redactada con intención pedagógica, como texto para el estudio de las matemáticas. Por ello Euclides tiene que combinar dos perspectivas:

– Conservar partes de las tradiciones y escuelas anteriores, como la pitagórica, la de Quíos, la platónica; a veces manteniendo las demostraciones y construcciones originales, a veces añadiendo pruebas más acordes con su sistema de exposición; también, desarrollando áreas iniciadas por otros, como la teoría de las magnitudes irracionales de Eudoxo o la estereometría de Teeteto.
– Seguir las exigencias metodológicas de Aristóteles para la elaboración del conocimiento científico. Por ello se apoya en un breve conjunto de axiomas y nociones comunes, así como en un gran número de definiciones, referidas a entidades cuya existencia irá siendo probada.

Hay que recordar que la influencia de Aristóteles será notable entre los estudiosos alejandrinos, y más desde que Estratón de Lampsaco, tercer director del Liceo, traslada al Museo la biblioteca del estagirita, así como sus colecciones zoológicas y botánicas. Pero también hay platonismo en Euclides. El argumento clásico es que los *Elementos* acaban presentando la construcción de los poliedros regulares como homenaje a la cosmología de Platón en el *Timeo*. Es cierto que el argumento no es contundente, porque ese final puede deberse simplemente al orden de exposición, que avanza desde lo simple a lo complejo. Pero difícilmente en esa época alguien interesado por las matemáticas podía sustraerse al influjo de Platón, y la mera empresa de elaborar un manual sistemático para la enseñanza de las matemáticas se inserta en la política cultural platónica. Los *Elementos* es una obra que conecta perfectamente con la política cultural de los Ptolomeos, ejercida desde el Museo y la Biblioteca, fundados hacia el 285 a.n.e., consistente en recopilar, seleccionar y sintetizar todo el saber adquirido por la civilización helena, para su enseñanza y difusión. Es posible que los *Elementos* hayan determinado el canon de la ciencia alejandrina, que pasando por la *Syntaxis Mécánica* de Filón de Bizancio (circa 225 a.n.e.) y los tratados de Herón (s. I d.n.e.) alcanza hasta la *Syntaxis astronómica* (s. II d.n.e.) de Claudio Ptolomeo, el famoso *Almagesto.*

Arquímedes, cumbre de las matemáticas griegas

Más difícil resulta a los historiadores pronunciarse sobre el platonismo o aristotelismo de Arquímedes de Siracusa (285-213 a.n.e.). Este dilema se halla conectado a dos cuestiones relacionadas entre sí y que se convertirán en un tópico obligado a partir de los autores del siglo I d.n.e., como Herón de Alejandría, Carpos de Antioquía y Gémino, a saber, cuás es la conexión entre geometría y mecánica, y cuál es el papel de Arquímedes en la historia de la mecánica. El historiador latino Plutarco de Queronea lo presenta en su *Vida de Marcelo* (circa 100 d.n.e.) como un platónico riguroso, pero es una visión idealizada. Otros autores lo han visto como el matemático ingeniero, más en consonancia con el aristotelismo.

En la mayoría de sus obras Arquímedes no parece seguir el canon científico de Aristóteles o Euclides, aunque podemos presumir con bastante seguridad que conoció las obras de ambos relativas al tema. Sus obras parecen tener un formato distinto, son una especie de informes monográficos sobre sus investigaciones. En *El Método*, dirigido a su amigo Eratóstenes, obra perdida durante siglos y recuperada por Heiberg en 1903, sigue la costumbre, iniciada por los estudiosos alejandrinos, de presentar los tratados científicos con una carta-prólogo donde el autor toma posición respecto a los asuntos allí expuestos mediante referencias a autores más antiguos, predecesores en esos temas. Sabemos que le gustaba enviar a los matemáticos de Alejandría problemas a resolver, enunciados sin pruebas e incluso enunciados falsos, quizá como acicate de amigos y medio de discriminar entre buenos y malos matemáticos. Como él mismo dice:

> Es conveniente que los matemáticos descubran las cosas por sí mismos.

Desde la recuperación de *El Método* los historiadores de la ciencia han reactivado la vieja cuestión de cuál era la visión de Arquímedes sobre la relación entre geometría y mecánica. ¿Es la mecánica un simple método heurístico para resolver problemas matemáticos que luego debemos probar mediante la geometría? ¿Consideraba igual de valiosas las demostraciones mecánicas, donde hace uso de equilibrios y centros de peso, que las demostraciones geométricas al modo euclídeo? En su célebre libro sobre Arquímedes defiende Dijkterhuis que las objeciones que el siracusano podía plantear respecto a sus propios trabajos mecánicos no se debían a las consideraciones mecánicas, a la mezcla de mecánica y geometría, sino al uso de indivisibles. ¿Ahora bien, necesitaba Arquímedes probar mediante la geometría lo que ya había probado mediante la mecánica para asegurarse de la certeza de sus resultados o sólo para que fueran aceptados?

Ya hemos visto anteriormente cómo en los *Analíticos Segundos* Aristóteles considera apropiado el uso de los principios geométricos en la mecánica, considerando esta ciencia subordinada a la primera. Todo descubrimiento por la vía mecánica, aunque fuera considerado útil, probable o razonable, debía ser validado por la vía geométrica como garantía de verdad: sólo eso podía ser llamado demostración. Aunque lo importante no es sólo la obtención de nuevos resultados, sino que además el método mecánico proporciona pistas adecuadas para conseguir la demostración geométrica, indicando por dónde hay que avanzar. Cuando Arquímedes escribe *El Método* está convencido de que el método mecánico conducirá a nuevos descubrimientos en el futuro, por él mismo y por otros matemáticos que lo adopten.

Por el contrario, el uso de indivisibles era un tema problemático desde que Zenón había expuesto sus aporías, que ni el propio Aristóteles, pese a sus esfuerzos, había logrado conjurar. Aunque Arquímedes no tuviera reparo en usar los indivisibles como método heurístico debía ser consciente de la dificultad de que los resultados obtenidos con ese procedimiento fuesen aceptados por la comunidad matemática, en particular por la alejandrina, y de hecho no parece haber tenido ningún interés en justificar epistemológicamente el uso de indivisibles, emulando y distanciándose de Aristóteles.

En definitiva, en Arquímedes podemos encontrar rasgos euclídeos, como el hecho de empezar su obra *Sobre el equilibrio de planos* introduciendo una serie de postulados; rasgos aristotélicos, en lo que atañe, por ejemplo, a las relaciones entre geometría y mecánica; rasgos platónicos y pitagóricos, como la creencia en que las matemáticas constituyen los principios de la Naturaleza; e incluso podemos afirmar que comparte con Tales la convicción de que las figuras geométricas tienen propiedades naturales inherentes. Con esto quiero decir que aunque Arquímedes sea heredero de toda la matemática griega, no creo que pueda ser adscrito a ninguna tendencia o escuela determinada.

Me imagino a Arquímedes como alguien que fue educado en las matemáticas desde la infancia, por su padre el astrónomo Fidias, y que ya para siempre proyectó esa mirada matemática con curiosidad sobre todas las facetas del mundo que le rodeaba. Así parece indicarlo la enorme variedad de sus campos de trabajo y su posición marginal respecto a los sistemas epistemológicos dominantes. Era un matemático vocacional mucho más interesado en resolver problemas que en justificar sus resultados. Sabemos que consideró que el sistema heliocéntrico defendido por su contemporáneo Aristarco de Samos podía ser verdadero; ello nos da una prueba más del estilo abierto de Arquímedes, capaz de enfrentar tradiciones arraigadas y arriesgarse en la búsqueda de nuevas vías para el conocimiento.

Arquímedes en Iberia

Para terminar quiero desmentir una falsa noticia sobre la posible presencia de Arquímedes en la Península Ibérica, noticia que se remonta a Leonardo da Vinci. A principios del siglo XX el estudioso italiano Antonio Favaro exponía:

> Al tempo in cui Torelli scriveva non era ancor noto un passo di Leonardo da Vinci, il quale nota d’aver “ritrovato nelle storie delli spagnioli” che Archimede Siracusano si trovava presso Eclideride, re dei Cilodastri, nel tempo in cui erano in guerra con gl’inglesi, e, combattendose sul mare, suggerí certa disposizione da darse all’armatura delle navi per la quale poteva lanciarsi facilmente pece infuocata che obbligava il nemico ad abbandonare il combattimento e metteva in grava pericolo i vascelli.
>
> Antonio Favaro, *Archimede*, 2ª ed., 1923]

La obra mencionada de Torelli es *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis*, Oxford, 1792**.** Parece, por tanto, que en algún momento posterior a la obra de Torelli y anterior a la de Favaro alguien reparó en una cita sobre Arquímedes en un manuscrito de Leonardo. En su famosa obra de 1956 sobre el matemático de Siracusa todavía el historiador de las matemáticas Dijkterhuis repetía:

> According to a statement in the biography with which J. Torelli introduces his great Archimedes edition Archimedes is said after his return from Egypt to have visited other countries as well. There is a particular story about a voyage to Spain in a note by Leonardo da Vinci, in which the latter mentions that he has read in a history of the Spaniards that the Syracusan Archimedes aided Eclidérides, King of the Cilodastri, in a maritime war against the English through the invention of a device for spouting burning pitch on the ships of his opponents. It is, however, altogether unknown in what work Leonardo can have read this, and authorities on spanish History ignore both King Ecliderides and the people of Cilodastri.
> [Dijksterhuis, *Archimedes*, 1956]

Y en la edición catalana de *El Método* su traductor y prologuista P. G. Urbaneja señala:

> Hi ha un testimoni, no comprovat, de Leonardo da Vinci, que assegura que Arquimedes va estar a la península Ibérica, cridat per Eclidèrides, rei dels cilodastres, a qui va ajudar en els seus combats navals.
> [*Mètode*, 1997, prólogo de González Urbaneja]

Es lógico que nadie pudiera informar a los antedichos autores sobre el rey Ecliderides, ni sobre el pueblo de los cilodastros, porque nunca existieron ni uno ni otro. El tal Ecliderides no es otro que El Cide Ruy Díez, a quien separan de Arquímedes trece siglos. Según mi hipótesis, esa confusión se remonta a la época en que Leonardo fue ingeniero general de fortificaciones del ejército de César Borgia, entre el verano de 1502 y la primavera de 1503. Los Borgia eran una familia originaria del reino de Valencia, territorio que había sido conquistado a finales del siglo XI por El Cid Ruy Díez de Vivar. Allí disponían de amplias posesiones y ostentaban un título nobiliario: el ducado de Gandía. Leonardo debió leer en algún libro de la biblioteca de los Borgia la atribución al Cid de un ataque con catapultas contra naves enemigas. Cuando tiempo más tarde recordó ese suceso, probablemente a propósito del tema de los ingenios mecánicos, Leonardo ya no recordaba el nombre con precisión y no debía tener acceso a su fuente escrita original. De ahí que al citar de memoria convirtiese a El Cid Ruy Díez en Ecliderides. La cita de Leonardo debe hallarse en alguno de los diarios donde anotaba asuntos de su interés, de mecánica entre otros. ¿En qué obra pudo haber leído Leonardo esa referencia al Cid? Entre las obras manuscritas posibles, anteriores a la imprenta, habría que citar las siguientes:

– *Historia de Valencia,* del autor árabe Ben Alcama, escrita hacia el año 1100 y hoy perdida.
– *Historia Roderici,* escrita hacia el 1200.
– *Chronicon Mundi,* del obispo Lucas de Tuy, que data de 1236 y tuvo una gran influencia en los historiadores del círculo de Alfonso X el Sabio.
– *De rebus Hispaniae,* de Rodrigo Jiménez de Toledo, redactada en 1243.
– *Crónica de Castilla,* hacia 1300.
– *Crónica particular del Cid,* hacia 1400.

Entre los libros impresos, el más probable sería la *Crónica del Cid Ruy Díaz,* editado en Sevilla en 1498. Entre los manuscritos citados considero que el más probable es el de Jiménez de Toledo, por ser su autor una eminencia de la Iglesia, y porque su obra tuvo una gran difusión hasta el siglo XVI.

Si el hecho histórico atribuido al Cid es cierto debería referirse al ataque por mar que tropas de Alfonso VI de Castilla, aliado con Génova y Pisa, dirige contra el puerto de Valencia en el año 1092. Recordemos que Alfonso VI es el rey de Castilla a quien se enfrentó el Cid, según queda recogido en el *Cantar del Mío Cid,* texto fundacional de la literatura española. El uso de catapultas contra los navíos en esa época y más tarde está bien documentado. En 1238 las tropas de Jaime I las usaron para conquistar Valencia, enfrentándose a las naves enviadas por Abu Zakkariya, rey de Túnez, en auxilio de Zayyan, rey de Valencia. Por las misma época en que Leonardo se relacionaba con los Borgia el famoso pirata berberisco Barbarroja saqueó Cullera (1503), suceso que debió ser conocido y comentado por los Borgia.

Respecto a los Cilodastros sólo puedo hacer conjeturas. Ni siquiera podemos saber por ahora si el texto en que se basa la confusión de Leonardo estaba escrito en latín o en castellano. Sospecho que equivocó el sentido de una frase que juntaba dos términos. Uno podía ser cide o cidello, o bien cielo o caelo; el otro, astro rey o astris rex. De modo que, por ejemplo, una frase como “del cielo astro rey” pudo ser interpretada –y transformada en la memoria– como “rey de los cilodastros”. Téngase en cuenta las dificultades de lectura de los manuscritos, las erratas frecuentes de los amanuenses, y para el caso de que fuera un texto impreso, el hecho de que aún no había una tipografía estándar, además de las erratas.

En cualquier caso, volver a localizar el diario de Leonardo donde consta la cita sobre Arquímedes será mucho más fácil que averiguar el texto de donde la sacó. Así pues, respecto al tema de la posible presencia del genio siracusano en Iberia, debemos contentarnos con recordar que en la época de da Vinci hacía tiempo que había llegado a la Península Ibérica, de manos de los matemáticos árabes, el espíritu de Arquímedes.

Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia

Bibliografia:

- Las citas de obras de Platón y Aristóteles corresponden a las traducciones al español publicadas en Editorial Gredos, Madrid.
- Las citas de Arquímedes corresponden a la edición en castellano de *El Método,* Alianza Ed., con prólogo de Luis Vega, y a la edición catalana *Mètode,* de la Fundación Bernat Metge, con prólogo de Pedro G. Urbaneja.
- Brunschvicg, L: *Les étapes de la philosophie mathémathique,* A. Blanchard.
- Burkert, W.: *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism,* Harvard Univ. Press, 1972.
- Burnyeat, M.F.: *Plato on Why Mathematics is Good for the Soul,* en el libro *Mathematics and Necessity*, Oxford University Press, 2000.
- Caveing, M.: *Zénon d'Élée,* Vrin, 1982.
- Caveing, M.: *Introduction générale aux Eléments d'Euclide*, en la obra *Euclide d'Alexandrie: Les Eléments*, vol. 1, P.U.F. 1990.
- Caveing, M.: *La figure et le nombre: Recherches sur les premières mathématiques des Grecs,* Presses Universitaires de Septentrion, 1997.
- Dijksterhuis, E.J.: *Archimedes*, Princeton University Press, 1987.
- Fowler, D.H. – *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Press 1987.
- Frajese, A.: *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, 1977.
- Gardies, J.-L.: *Le raisonnement par l'absurde*, P.U.F. 1991.
- Gardies, J.-L. - *L'organisation de mathématiques grecques de Théétète à Archimède*, Vrin 1997.
- Heath, Th.: *Mathematics in Aristotle,* Thoemmes Press., 1996.
- Kirk, G. S. y Raven, J.E.: *The Presocratic Philosophers,* Cambridge Univ. Press, 1966.
- Klein, J.: *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*, M.I.T. Press, 1968.
- Knorr, W.: *The Evolution of the Euclidean Elements*, Reidel, 1975.
- Knorr, W.: *Infinity and Continuity: The Interaction of Mathematics and Philosophy in the Antiquity,* en Kretzman, W.: *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought,* Cornell University Press, 1982.
- Mueller, I.: *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, M.I.T. Press, 1981.
- Serres, M.: *Les origines de la Géometrie*, Flammarion, 1993.
- Spengler, O.: *La decadencia de Occidente,* Espasa Calpe, 1923
- Szabó, À.: *The Beginnings of Greek Mathematics,* Reidel, 1976.
- Tannery, P.: *Pour l'histoire de la science hellène*, Jacques Gabay 1990.
- Van der Waerden, B.L.: *Awakening Science,* Noordhoff, 1956.