

Arquímedes y la geometría dinámica

Carlos Mederos Martín

Introducción

Podemos afirmar que a la hora de enseñar matemáticas no basta con “explicar” los conceptos propios de esta disciplina. Por el contrario, si queremos que sean asimilados de una forma significativa por los estudiantes es fundamental estudiar sus orígenes y su evolución a lo largo de la historia; es decir, hay que estudiar cómo ha evolucionado la construcción del conocimiento matemático, así como los recursos intelectuales implicados en dicha construcción.

Pero acudir a la Historia como recurso didáctico presenta ciertas dificultades, entre las que podemos destacar, en primer lugar, la necesidad de disponer de suficientes fondos documentales (textos) sobre la actividad científica a lo largo de los siglos, necesidad esta no siempre bien cubierta, sobre todo en los lugares alejados de los tradicionales centros de producción cultural; y, en segundo lugar, si suponemos resuelta la dificultad anterior, nos encontramos con que los textos antiguos son difíciles de leer, dado que están escritos en lenguas que, generalmente, no son de dominio común, las figuras no son muy claras y, a menudo, se usan notaciones desacostumbradas para la mayoría de los estudiantes, lo que produce cierto rechazo entre los posibles lectores.

Estas dificultades pueden ser paliadas en parte usando, bajo determinadas condiciones, diferentes tipos de software. La primera, por medio de la *digitalización de los documentos* y su almacenamiento en bibliotecas virtuales, accesibles desde cualquier lugar. La segunda, por medio del uso de programas relacionados con la didáctica, como, por ejemplo, el software orientado a la “geometría dinámica”, cuyo uso nos permite prescindir del estudio de ciertos detalles “técnicos”, para, al mismo tiempo, ayudarnos a percibir la belleza y el ingenio de las ideas simplificadas al máximo (“desnudas”): Esto es lo que podemos llamar la *digitalización de las ideas*. Este trabajo es un intento de poner en práctica esto último, usando el software de geometría dinámica *Geometer’s Sketchpad*¹ y uno de los tópicos más conocidos de los trabajos de Arquímedes: la cuadratura de la parábola.

Importancia “didáctica” de los trabajos de Arquímedes

Si queremos introducirnos en el estudio de la evolución del conocimiento matemático a lo largo de la historia, debemos considerar la obra de Arquímedes como prototípica, dadas las especiales características de la misma, entre las que podemos destacar:

- Arquímedes desarrolla técnicas de demostración orientadas a la consecución del “rigor”, concepto éste de vital importancia en el desarrollo histórico de la Matemática. En este sentido podemos destacar la maestría de Arquímedes en la aplicación del Método de Exhaución, cuyo

¹ *Geometer’s Sketchpad*. © by Key Curriculum Press. Berkeley. CA.

objetivo es evitar el uso del “infinito” en las demostraciones, siguiendo la tradición filosófica griega que excluía el uso de este concepto para la adquisición del conocimiento racional, es decir, del conocimiento “verdadero”, debido a la multitud de contradicciones en las que nos hace caer.

- Pero la aplicación del Método de Exhaustión presenta un problema: se debe conocer a priori el resultado que se quiere demostrar. En consecuencia es necesario disponer de otros métodos para obtener estos resultados que luego serán demostrados “rigurosamente”, es decir, “sin hacer intervenir el infinito”. Estos métodos suelen ser bastante intuitivos y basados en el conocimiento empírico. Arquímedes descompone áreas en infinitos segmentos que luego “pesa” con su balanza; halla centros de gravedad, donde supone concentrado todo el “peso” de una figura, llegando así a resultados que luego demuestra por el Método de Exhaustión.

En resumen, la obra de Arquímedes es un conjunto “cerrado” respecto a la construcción del conocimiento matemático: dispone de métodos exploratorios para obtener nuevos resultados y de métodos demostrativos para confirmar la “verdad matemática” de dichos resultados. Esta característica convierte la obra de Arquímedes en una herramienta didáctica única, que debería ser considerada “obligatoria” en la formación de los estudiantes, en particular, en la formación de los futuros matemáticos.

A continuación se presentan algunos de los conocidos resultados de Arquímedes usando *Geometer's Sketchpad*, con el propósito de ilustrar, por una parte, las diferencias entre *descubrimiento y demostración* en matemáticas, y por otra, la relación entre el rigor en las demostraciones y su conexión con la prohibición del uso del infinito en la construcción de las mismas. Es importante recordar que su “método” exploratorio se basa, fundamentalmente, en considerar los objetos geométricos compuestos por infinitos elementos más sencillos, de manera que del estudio de ciertas propiedades de dichos elementos podemos deducir propiedades del “todo”; mientras que sus demostraciones “rigurosas” (Método de Exhaustión) se basan en evitar radicalmente el uso del infinito.

Un recorrido “dinámico” por algunos resultados de Arquímedes

1. El método de exhaustión

Este método se basa en la utilización de la demostración indirecta (o reducción al absurdo) junto con la Proposición X.1 de los *Elementos* de Euclides (llamada por algunos Axioma de Arquímedes).

Un ejemplo paradigmático de aplicación del Método de Exhaustión lo encontramos en la Proposición 1 de *La medida del círculo*:

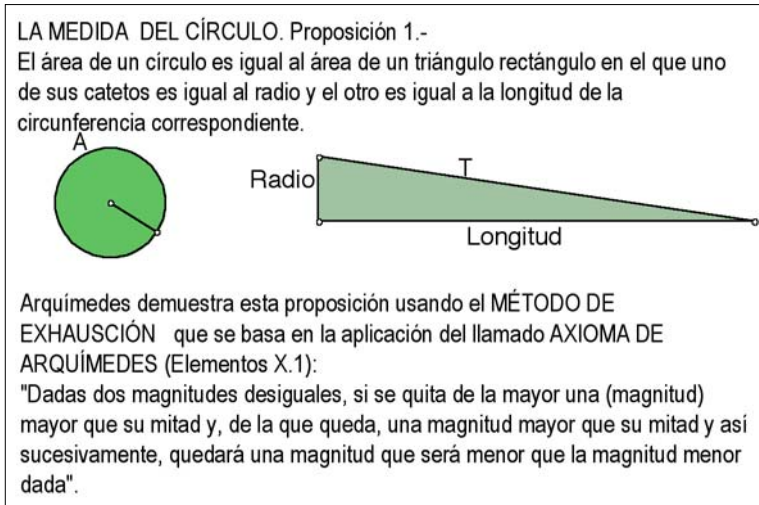


Figura 1

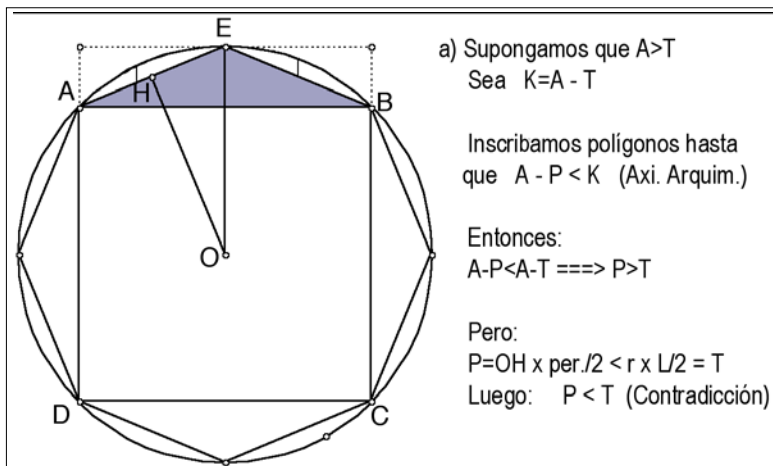


Figura 2

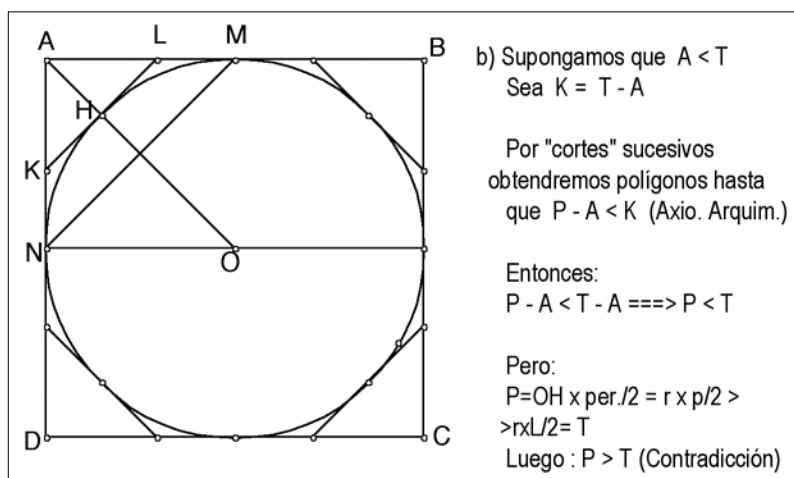


Figura 3

Obsérvese que antes de proceder a la demostración debemos conocer el hecho de que el área del círculo (A) es igual al área de cierto triángulo (T), resultado que se ha obtenido previamente aplicando algún otro método. Por último, vemos que el Axioma de Arquímedes, junto con la negación de lo que queremos demostrar (A distinto de T), nos permite encontrar un polígono de área P, comprendida entre A y T, y que resulta ser contradictorio.

2. Una demostración rigurosa

Como ya se ha dicho la idea de “rigor” en la demostración arquimediana está ligada, entre otras cosas, a la ausencia de referencias al infinito. Esta característica se puede observar de forma clara en la Proposición 9 del libro *Sobre el equilibrio de los planos*:

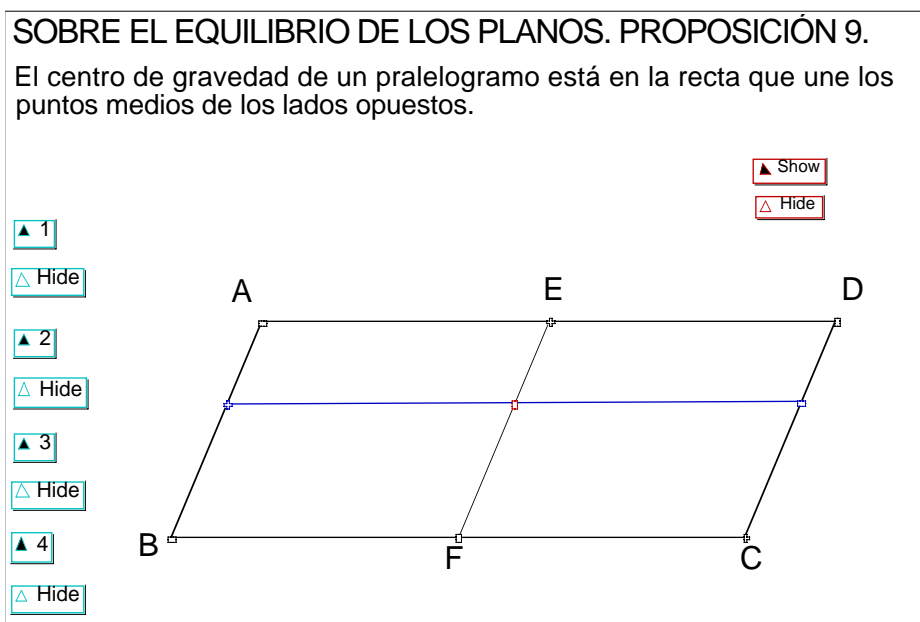


Figura 4

Queremos probar que el centro de gravedad del paralelogramo ABCD está en la línea EF. Podríamos afirmar que el paralelogramo está formado por *infinitos* segmentos, cada uno de los cuales tiene su centro de gravedad en la recta EF, por estar en ella su punto medio; por lo tanto, el centro de gravedad de todo el “conjunto” estará también en esta recta. Sin embargo Arquímedes razona de la siguiente manera:

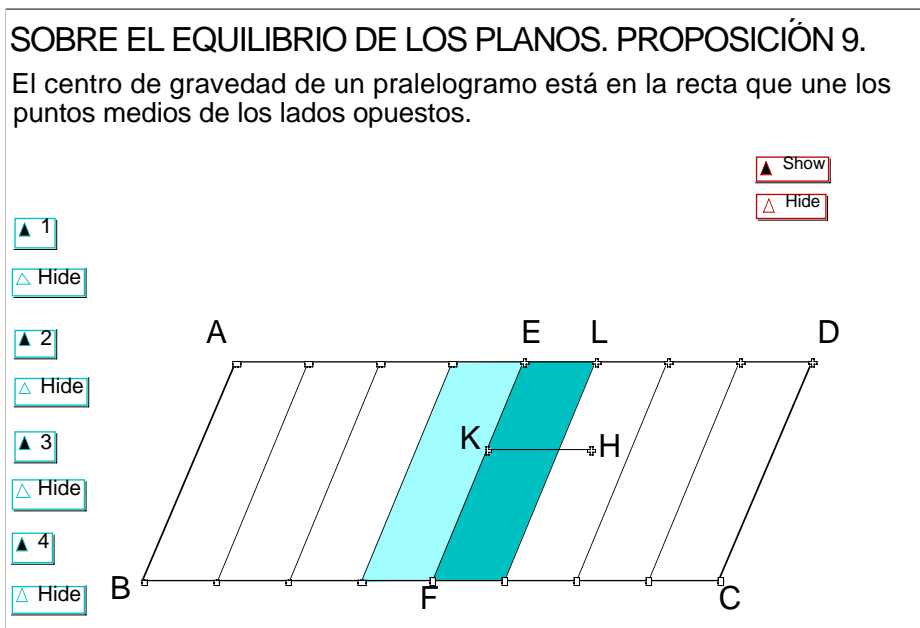


Figura 5

Supongamos que el centro de gravedad no está en EF, sea éste H. Tracemos HK paralela a AD y a BC, que corta a EF en K. Entonces es posible por bisección determinar el segmento EL de manera que $EL < KH$. Ahora dividimos EA en las mismas partes que ED y trazamos paralelas a AB y DC. Tenemos así un número par de paralelogramos iguales, tal que sus centros de gravedad estarán situados a igual distancia a lo largo de una recta; por lo tanto, el centro de gravedad de todo el conjunto estará situado en la línea que une los centros de gravedad de los dos centrales [Prop. 5 -Corolario 2 del Libro I de *Sobre el equilibrio de los planos*]; pero esto es imposible porque H está fuera de los dos paralelogramos centrales.

Obsérvese cómo negando lo que queremos demostrar y aplicando la bipartición *un número finito de veces*, encontramos una contradicción que nos permite afirmar la veracidad de la proposición. Podemos decir que esta sencilla demostración resume de manera admirable la noción de “rigor matemático” en Arquímedes.

3. El “método” mecánico de Arquímedes

Veamos ahora los recursos usados por Arquímedes para obtener algunos de los resultados que luego probará “rigurosamente”. Este conjunto de recursos lo denominaremos “método mecánico” y se basa en dos principios fundamentales: el uso de la balanza (ley de la palanca) para “pesar” geoméricamente magnitudes (áreas, volúmenes, etc.) y el cálculo de centros de gravedad, en los que suponemos concentrado el “peso” (es decir, el área, el volumen, etc) de los objetos geoméricos a estudiar. A continuación se presentan ejemplos sobre estos aspectos extraídos de la obra de Arquímedes.

En primer lugar veremos la Proposición 8 del Libro I de *Sobre el equilibrio de los planos*, que nos permite ilustrar el uso geométrico de la balanza:

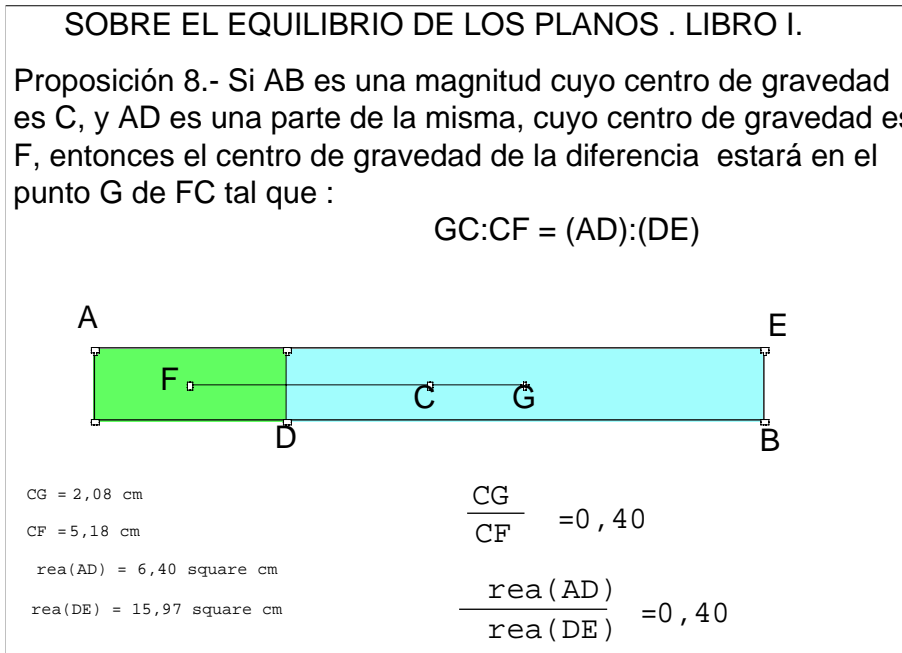


Figura 6

Si aprovechamos las posibilidades dinámicas de *Geometer's Skechpad* y desplazamos el punto D, podemos ver que se conserva la igualdad de razones enunciada, lo que nos permite pasar de una relación entre áreas a una relación entre segmentos, es decir, comparamos (medimos) áreas a través de la comparación (medida) de segmentos. Esto puede ser considerado como una reducción de un problema más complicado a otro más sencillo.

En segundo lugar nos referiremos al otro aspecto importante del “método mecánico”: el cálculo de los centros de gravedad. Como ejemplo ilustrativo de esta cuestión podemos ver la Proposición 15 del Libro I de *Sobre el equilibrio de los planos*:

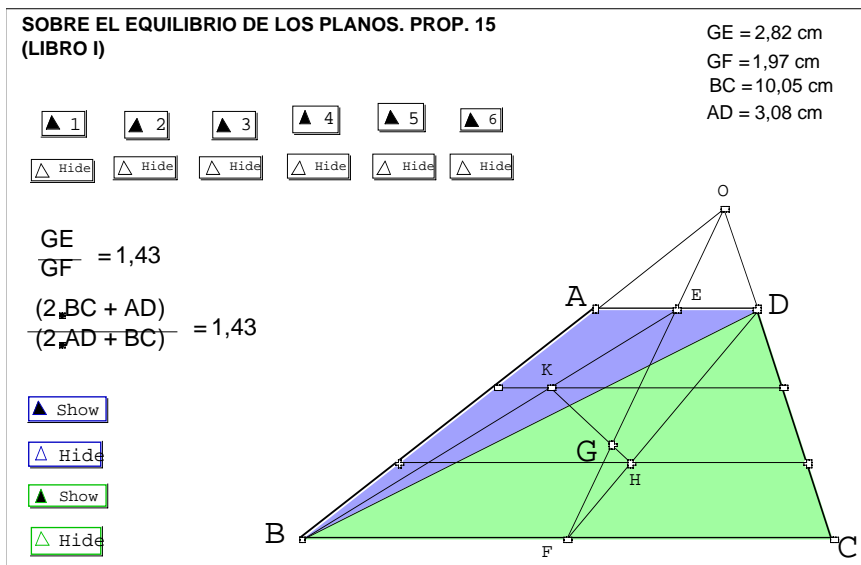


Figura 7

Esta proposición muestra cómo se puede hallar el centro de gravedad de un trapecio descomponiéndolo en dos triángulos y aplicando los postulados y las proposiciones anteriores.

Por último, veremos una proposición en la que se combinan los dos resultados anteriores; se trata de la Proposición 6 de *La cuadratura de la parábola*:

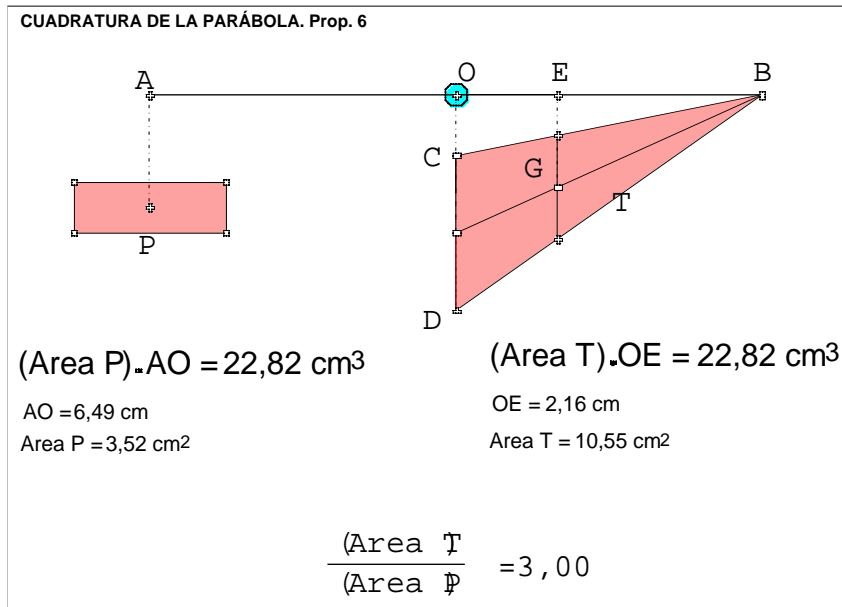


Figura 8

En la figura 8 tenemos una balanza AOB colocada horizontalmente y apoyada en su punto medio O. Sea el triángulo BCD suspendido desde los puntos B y O y tal que CD está en la misma vertical que O. Entonces, si P es un área tal que suspendida del punto A hace que el sistema permanezca en equilibrio, se cumplirá que P es un tercio del triángulo BCD. En efecto, si el sistema está equilibrado y suponemos que el área del triángulo está concentrada en su centro de gravedad, aplicando la ley de la balanza, llegamos a la conclusión de que la razón entre las áreas es igual a la razón inversa entre sus brazos, es decir 3, dado que $AO/OE = OB/OE = 3$, por ser G el centro de gravedad de un triángulo. Esto nos permite expresar una razón entre áreas por medio de una razón entre segmentos, o lo que es lo mismo, medir áreas a través de la medida de segmentos.

4. El método y la cuadratura de la parábola

Una vez expuestos los principios básicos del método mecánico estamos en condiciones de presentar un ejemplo del mismo. La Proposición 1 de *El Método* es, posiblemente, el ejemplo más característico:

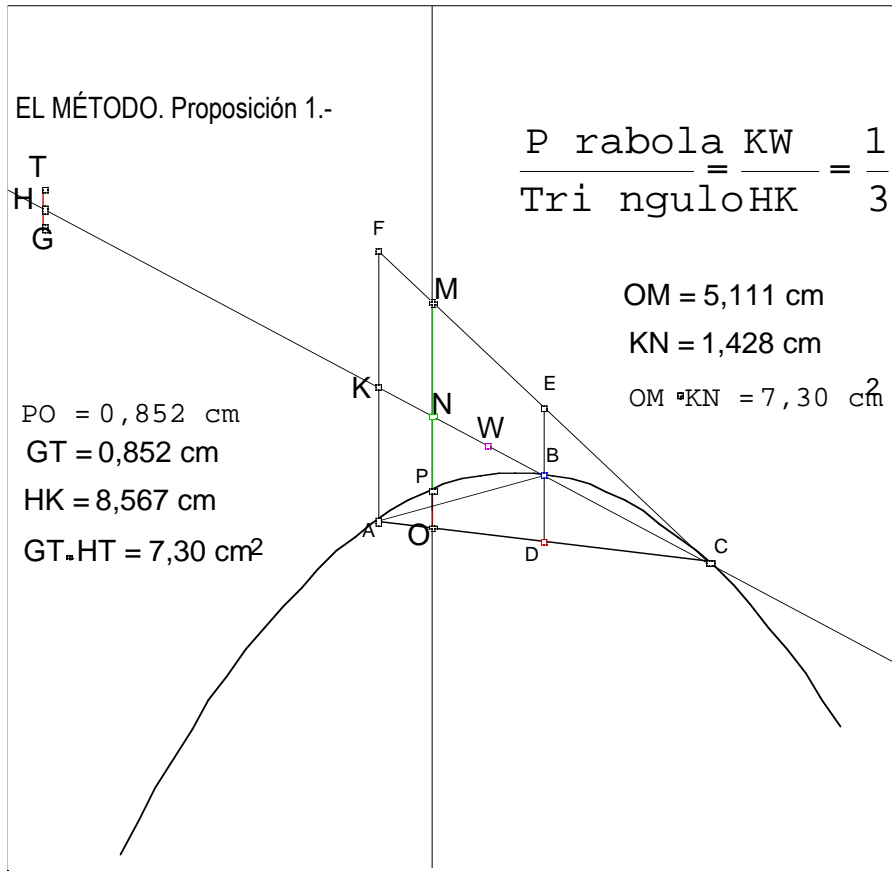


Figura 9

En el *Sketch* de la Figura 9 tenemos el segmento parabólico ABC cuya área queremos evaluar. Construimos el triángulo ACF, siendo CF tangente a la parábola en C y con AF paralelo al eje de la parábola. Pues bien, la proposición en cuestión establece que la razón entre el área del segmento parabólico y el área del triángulo es 1/3. Para llegar a este resultado podemos hacer lo siguiente: sea K el punto medio del segmento AF. Construyamos el segmento CH, tal que K sea su punto medio. Sea una recta cualquiera paralela al eje de la parábola que determina los segmentos MO con el triángulo ACF y PO con el segmento parabólico. Situemos ahora el segmento PO en el punto H, es decir, $GT=PO$. Si movemos la recta citada, de manera que el punto O se desplace a lo largo de AC, veremos que se conserva la igualdad de los productos $GT \cdot HT$ y $MO \cdot KN$. Esto significa que el segmento TG, que es igual a PO, situado en H equilibra al segmento MO situado en su posición en el triángulo. Por otra parte, al mover la recta vemos que los *infinitos* segmentos PO recorren el segmento parabólico y los *infinitos* MO el triángulo. Luego, todo el segmento parabólico situado en H se equilibra con el triángulo situado en su posición. Pero, como hemos dicho antes, si están en equilibrio entonces la razón entre las áreas es igual a la razón inversa entre los correspondientes “brazos” de la balanza, siendo estos HK y KW, donde W es el centro de gravedad del triángulo. Como HK es igual a KC (mediana) y W es el centro de gravedad, podemos concluir que la razón buscada es 1/3; por lo que podemos afirmar que el área del segmento parabólico es 1/3 del área del triángulo ACF, o lo que es lo mismo, 4/3 del área del triángulo ABC.

5. La cuadratura “rigurosa” de la parábola

Conocido el anterior resultado, Arquímedes procede a demostrarlo de una forma rigurosa, es decir, sin hacer intervenir el infinito, haciendo uso del Método de Exhaustión. La demostración la podemos encontrar, por ejemplo, en su libro *La cuadratura de la parábola*, concretamente en la Proposición 24, en cuya demostración se hace uso de la Proposición 23. Ambas proposiciones se exponen a continuación:

LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA. Proposición 23
 Dada una serie de áreas A, B, C, D, tal que cada una de ellas es igual a cuatro veces la siguiente entonces:

$$A+B+C+D+(1/3)D=(4/3)A$$

Área(A) + Área(B) + Área(C) + Área(C) + $\frac{\text{Área(C)}}{3}$ = 55,90 cm²

$\frac{4 \cdot \text{Área(A)}}{3} = 55,90 \text{ cm}^2$

Área(A) = 41,926 al cuadrado cm
 Área(B) = 10,481 al cuadrado cm
 Área(C) = 2,620 al cuadrado cm
 Área(D) = 0,655 al cuadrado cm

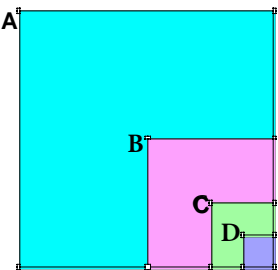
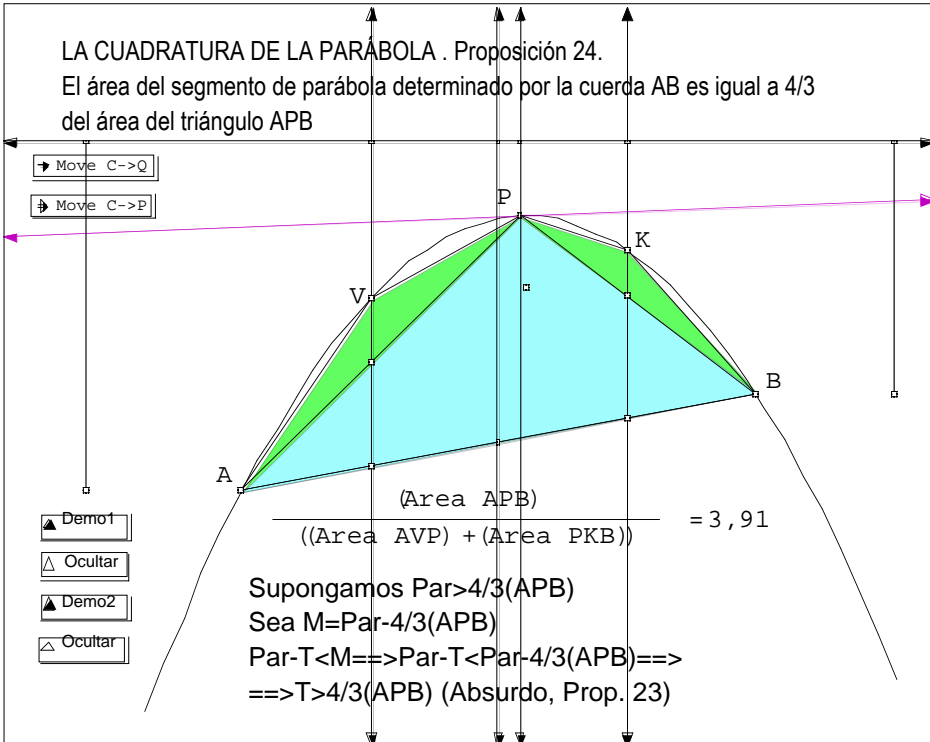


Figura 10

LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA . Proposición 24.
 El área del segmento de parábola determinado por la cuerda AB es igual a 4/3 del área del triángulo APB



$$\frac{(\text{Area APB})}{((\text{Area AVP}) + (\text{Area PKB}))} = 3,91$$

Supongamos $\text{Par} > \frac{4}{3}(\text{APB})$
 Sea $M = \text{Par} - \frac{4}{3}(\text{APB})$
 $\text{Par} - T < M \implies \text{Par} - T < \text{Par} - \frac{4}{3}(\text{APB}) \implies$
 $\implies T > \frac{4}{3}(\text{APB})$ (Absurdo, Prop. 23)

Figura 11

La Proposición 23 es una simple propiedad algebraica usada en la demostración indirecta de la Proposición 24. Esta última afirma que la razón entre el área del triángulo APB y la suma de las áreas de los triángulos AVP y PKB es igual a 4; es decir, el triángulo APB es cuatro veces mayor que la suma de los otros dos. Podemos aplicar nuevamente esta construcción en los cuatro pequeños segmentos de parábola que quedan fuera de los triángulos considerados, y así sucesivamente. Pero la Proposición 23, junto con la suposición de lo contrario de lo que queremos demostrar y el Axioma de Arquímedes (*Elementos* X.1) nos permiten encontrar una contradicción, que probaría el teorema, antes de tener que recurrir a un número infinito de repeticiones de la construcción expuesta.

Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia