VECTORES, OPERACIONES BÁSICAS. VECTORES EN EL SISTEMA DE C. CARTESIANAS

0.1 *Vectores y escalares.*

En Física existen *magnitudes* (todo aquello susceptible de ser *medido* -medir, es comparar magnitudes de la misma especie una de las cuales se ha tomado como unidad-) que quedan perfectamente determinadas dándoles un valor a la magnitud expresada en una unidad conveniente. Estas son las magnitudes *escalares*, así tenemos la *presión* ejercida por un gas en el interior de un recipiente, la *temperatura* en un lugar del espacio, el *trabajo* que se realiza al arrastrar un bulto desde un lugar a otro..., luego; la presión, la temperatura, el trabajo, etc., son magnitudes escalares.

Sin embargo, existen otras magnitudes que necesitan, además del valor asignado, una dirección y un sentido para quedar perfectamente determinadas. Nos referimos a las magnitudes *vectoriales*. Si queremos situar (saber su *posición*) a un alumno/a en el interior de una clase respecto de la puerta, no nos bastaría con medir la distancia que existe entre el alumno/a y la puerta sino que además habría que especificar la dirección. La *posición* de un objeto respecto de otro es una magnitud vectorial, también lo son la *velocidad*, la *aceleración*...

Se ha desarrollado un modelo matemático para representar a dichas magnitudes, los VECTORES.

Un vector es un segmento orientado en el espacio. Se puede caracterizar por:

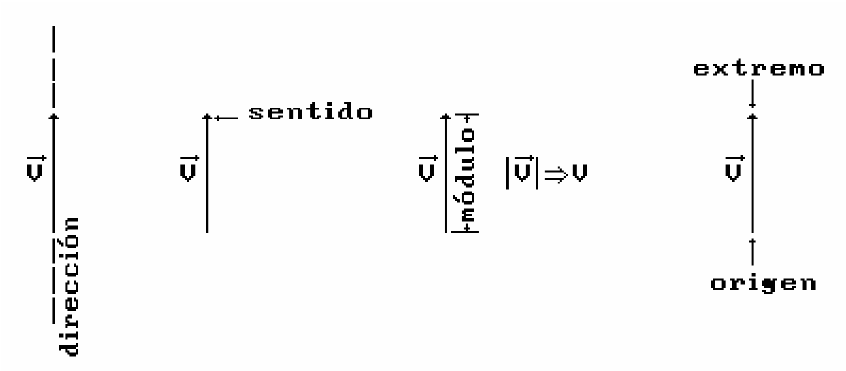
Origen a considerar cuando interese conocer el punto de aplicación del vector.

Dirección o línea de acción coincidente con la de la recta que la contiene o cualquier otra recta paralela.

Sentido viene determinado por la punta de flecha localizada en el extremo del vector.

Módulo es la distancia entre el origen y el extremo del vector.

Un vector puede venir representado mediante una letra en negrita o bien, situando encima de la letra una flecha y su módulo se representa en cursiva o bien, colocando entre barras a la letra con la flecha (fig. 0.1).

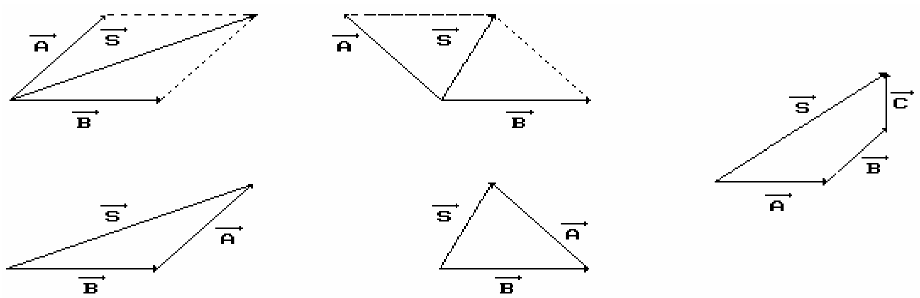


0.2 *Operaciones básicas*:

Vamos a estudiar, ahora, las operaciones básicas entre vectores. Los vectores que utilizaremos para definir las operaciones serán libres.

0.2.1 *Suma de vectores*.

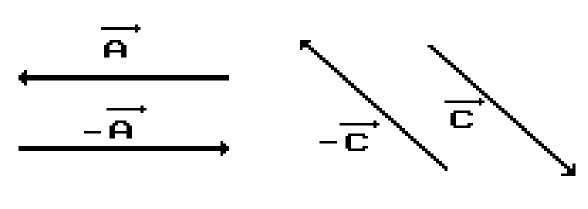
La suma de dos vectores **A** y **B** es un nuevo vector **S**. **A**+**B**=**S**. Gráficamente puede obtenerse mediante la regla del paralelogramo, o bien usando el método que consiste en colocar uno de ellos y en el extremo de éste se coloca el origen del otro siendo el vector resultante aquel que tiene de origen el del primero y de extremo el del segundo (fig. 0.2).



La suma de vectores posee la propiedad conmutativa y asociativa. **A**+**B**=**B**+**A**; (**A**+**B**)+**C**=**A**+(**B**+**C**).

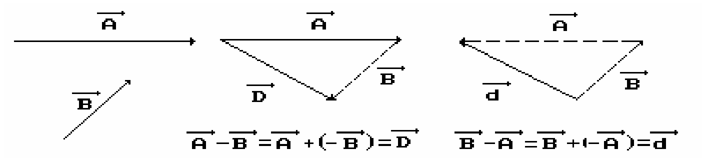
0.2.2 *Vector opuesto*.

El vector opuesto a uno dado (A) es otro vector de igual módulo dirección pero de sentido contrario al dado (-A).



0.2.3 *Diferencia de vectores*.

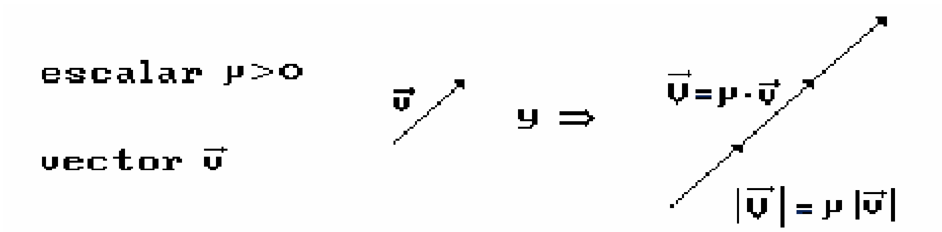
La resta de dos vectores **A** y **B** (**A**-**B**) es igual a la suma de **A** con el opuesto de **B** [**A**+(-**B**)].



La suma de un vector con su opuesto nos da el vector cero (**0**). **A**+(-**A**)=**0**.

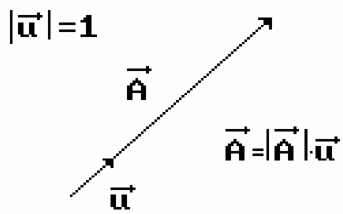
0.2.4 *Producto de un escalar por un vector. Vector unitario.*

Sea un escalar μ y un vector **v**. Se define al producto del escalar por el vector (μ·**v**) a un nuevo vector **V** de módulo μ veces el módulo de **v** (V=μv), de la misma dirección que **v** y de sentido igual al de **v** si μ>0. Si μ<0 el sentido de **V** será contrario al de **v**.



El cociente por un escalar es equivalente a multiplicar el vector (**v**) por el inverso del escalar (1/μ). **v**/μ=(1/μ)·**v**=**V**. El módulo de este nuevo vector será 1/μ veces el módulo de **v**...

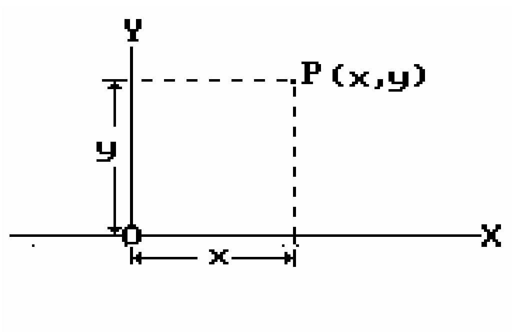
Podemos definir ahora como vector unitario (**u**) de uno dado (**A**) al cociente entre dicho vector y su

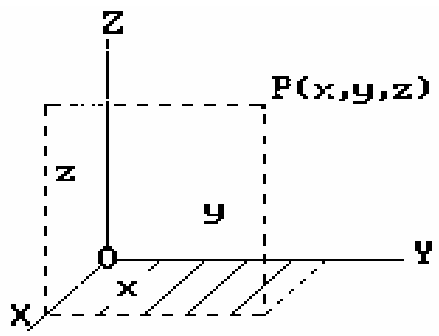


módulo (**u**=**A**/A). Lo que nos lleva a deducir que todo vector unitario tiene de módulo la unidad.

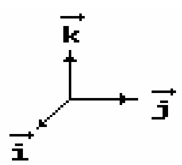
0.3 *Vectores en el sistema de coordenadas cartesianas*.

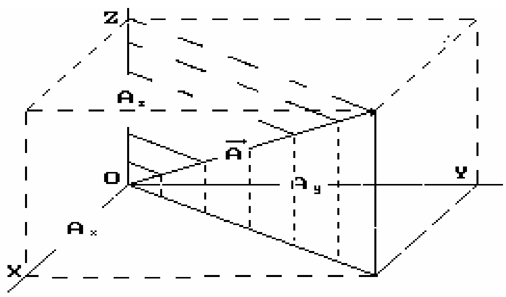
En el sistema de coordenadas cartesianas un punto en el plano viene determinado por una pareja de *números reales* *P*(x,y) y en el espacio por una *terna* *P*(x,y,z), también llamados *coordenadas cartesianas*.





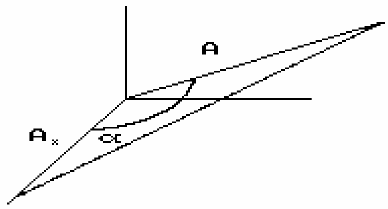
Estos puntos pueden venir, a su vez, determinados por un vector que tiene su origen en el origen de coordenadas y su extremo en el punto considerado.

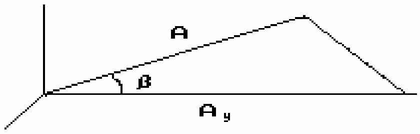


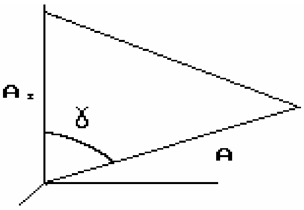


Los vectores unitarios **i**, **j**, y **k** son los que definen la dirección y sentido de los semiejes positivos OX, OY y OZ respectivamente.

A las proyecciones del vector sobre cada uno de los ejes se les denomina componentes del vector:







$$A_x = A\cos\alpha \qquad A_y = A\cos\beta \qquad A_z = A\cos\gamma \quad (0.1)$$

Asi pues, si queremos expresar un vector **A** en función de sus componentes cartesianas **A**(A_x,A_y,A_z), y vectores unitarios correspondientes...

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad (0.2)$$

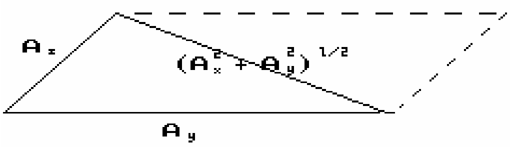
Según esto, dos vectores son iguales si lo son cada una de sus componentes. El vector **0** será aquél cuyas componentes son nulas **0**(0,0,0).

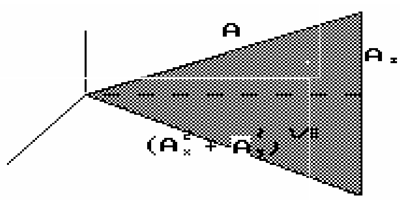
A los cosenos de los ángulos que forma el vector con cada uno de los ejes se les denomina cosenos directores, ya que éstos son las componentes del vector unitario que definen la dirección de aquel...

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}, (|\vec{A}| = A), \vec{u} = \frac{A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}}{A} = \frac{A_x}{A}\vec{i} + \frac{A_y}{A}\vec{j} + \frac{A_z}{A}\vec{k} \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{A_x}{A} \\ \cos\beta = \dfrac{A_y}{A} \\ \cos\gamma = \dfrac{A_z}{A} \end{cases} \quad (0.3)$$

Si quisiéramos determinar el módulo del vector en función de sus componentes, bastaría con aplicar Pitágoras...

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (0.4)$$



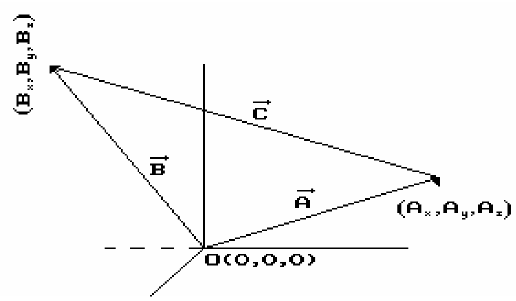


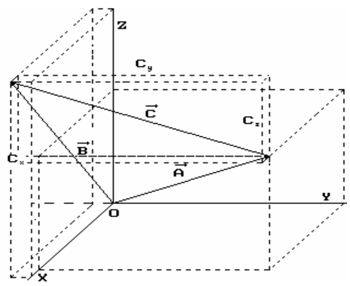
Teniendo en cuenta la expresión anterior y las obtenidas para los cosenos directores

$$\left.\begin{aligned} &\cos\alpha = \frac{A_x}{A}, \cos^2\alpha = \frac{A_x^2}{A^2} \\ &\cos\beta = \frac{A_y}{A}, \cos^2\beta = \frac{A_y^2}{A^2} \\ &\cos\gamma = \frac{A_z}{A}, \cos\ 2\gamma = \frac{A_z^2}{A^2} \end{aligned}\right\}, \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2}, \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (0..5)$$

llegamos a la siguiente relación...

Sumar, restar y multiplicar por un escalar resulta evidente, así, si **A**(A_x,A_y,A_z) y **B**(B_x,B_y,B_z) entonces **A**+**B**(A_x+B_x,A_y+B_y,A_z+B_z), es decir las componentes del vector suma son la suma de las componentes y **B**-**A**(B_x-A_x,B_y-A_y,B_z-A_z). *Nótese que las componentes del vector diferencia (**C**) coinciden con la diferencia entre las coordenadas del extremo y las del origen respectivamente...*



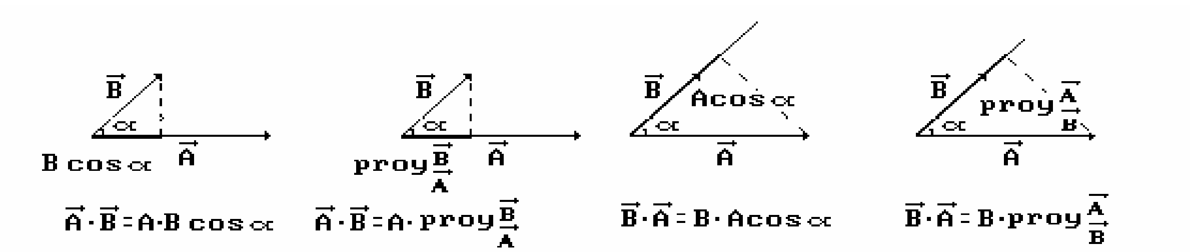


Finalmente λ**A**(λA_x, λA_y, λA_z), donde las componentes del nuevo vector serían las de **A** multiplicadas por el escalar...

0.4 ***Producto escalar de dos vectores.***

Es una magnitud escalar que nos informa de la tendencia de los vectores a apuntar hacia un mismo sentido y se obtiene multiplicando los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman. El producto escalar de dos vectores se denota por **A·B**=ABcosα **(0.6)**. De forma inmediata se deduce que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo (si

A⊥**B**⇒α=π/2 y cos π/2=0).Por otra parte el producto escalar de un vector por si mismo es igual a su módulo al cuadrado (**A**·**A**=A^2).



Como consecuencia de esta definición tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}\cdot\vec{i}=1\ ;\ \vec{j}\cdot\vec{i}=0\ ;\ \vec{k}\cdot\vec{i}=0 \\ \\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0\ ;\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1\ ;\ \vec{k}\cdot\vec{j}=0 \\ \\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0\ ;\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0\ ;\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1 \end{array}\right\} \left| \begin{array}{l} \vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}) \\ \\ \qquad \vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \quad (0.7) \end{array}\right.$$

Hemos obtenido finalmente la expresión del producto escalar de dos vectores en función de sus componentes.

Como aplicación inmediata del producto escalar podemos determinar el ángulo formado por dos vectores. Igualando expresiones...

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A}\cdot\vec{B}=ABcos\alpha \\ \\ \vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \end{array}\right\}, AB\cos\alpha=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_Z\,, \cos\alpha=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{AB} \quad (0.8)$$

Como propiedades de este producto podemos citar la conmutativa y la distributiva respecto de la suma [**A**·(**B**+**C**)=**A**·**B**+**A**·**C**].

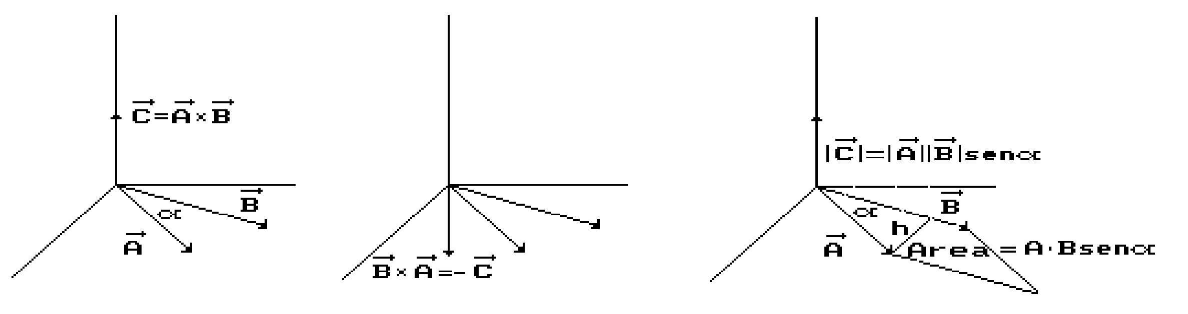
0.5 *Producto vectorial de dos vectores*.

El producto vectorial de dos vectores **A** y **B**, se denota por **A**x**B**, es un nuevo vector **C**, (**A**x**B**=**C**), definido de la forma que sigue:

a) El módulo de **C** es igual al producto de los módulos de **A** y **B** por el seno del ángulo que forman (C=ABsenα).

b) La dirección de **C** es perpendicular al plano formado por **A** y **B** y por ende a todos los vectores contenidos en ese plano.

c) El sentido de **C** coincide con el que tendría el avance de un sacacorchos (rosca derecha) si lo dispusiéramos en la dirección de **C** haciéndolo girar en el sentido de llevar el primer vector hacia el segundo vector que se multiplica.



Esta operación no posee la propiedad conmutativa, aunque si presenta la distributiva respecto de la suma.

Como consecuencia de la definición, los productos vectoriales entre los vectores unitarios...

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}x\vec{i} = 0\,;\ \vec{j}x\vec{i} = -\vec{k}\,;\ \vec{k}x\vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i}x\vec{j} = \vec{k}\,;\ \vec{j}x\vec{j} = 0\,;\ \vec{k}x\vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i}x\vec{k} = -\vec{j}\,;\ \vec{j}x\vec{k} = \vec{i}\,;\ \vec{k}x\vec{k} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{A}x\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})x(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) \qquad (0.9) \\ \vec{A}x\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k} \end{array}\right.$$

A este resultado también puede llegarse desarrollando el siguiente determinante...

$$\vec{C} = \vec{A}x\vec{B} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \begin{cases} C_x = A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y \\ C_y = A_x \cdot B_z - A_z \cdot B_x \\ C_z = A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x \end{cases} |\vec{C}| = |\vec{A}x\vec{B}| = A \cdot B \cdot sen\alpha \qquad (0.10)$$

Finalmente podemos comentar que el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo. Lo mismo podemos decir del producto vectorial de un vector por si mismo.

Cuestiones y Ejercicios. Vectores

1) ¿Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es máximo?...¿En que caso lo será?

2) Para dos vectores dados ¿su producto vectorial es mínimo cuando son....?

3) ¿El módulo de la suma de dos vectores dados siempre será menor que el módulo de la diferencia de esos vectores?

4) ¿En que casos el módulo de la suma de dos vectores coincide con la suma de los módulos de los vectores que se suman?

5) Calcular la resultante (vector -suma- en función de las componentes y vectores unitarios correspondientes) del sistema formado por los vectores **A**(3,-2,3); **B**(1,1,-2) y **C**(2,2,-1).

S: $6\vec{i} + \vec{j}$

6) Dado el vector **A**=2**i**+6**j**-4**k** determinar 3/2·**A**.

S: (3,9,-6).

7) Halla el vector unitario de **C**=3**i**+4**j**+5**k**.

S: $1/[5(2)^{1/2}](3,4,5)$.

8) Determinar el ángulo que forma el vector anterior con el eje OX, y el valor de su proyección sobre dicho eje.

S: 64,89º; 3.

9) Calcula el producto escalar de los vectores **V**=3**i**+5**j**-1**k** y **W**(-2,0,4).

S: -10.

10) Halla el vector unitario perpendicular a los vectores **V**(1,2,3) y **W**(-1,0,2).

S: $\frac{1}{3\sqrt{5}}(4\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k})$

11) Un vector **A** tiene de componentes (1,2,3). Otro vector **B** tiene de módulo $3^{1/2}$ y su componente x (B_x) vale 1. Determinar **B** para que sea perpendicular a **A**.

S: (1,1,1) o (1,-17/13,7/13).

12) ¿Cuál debe ser el valor de m para que el vector **A**(1,m,2) forme un ángulo de 60º con el eje Z?.

S: $\pm(11)^{1/2}$.

13) Dados **A**(5,3,4) y **B**=6**i**-**j**+2**k**, calcular:

a) su producto escalar

b) el ángulo que forman

c) los cosenos directores del vector **B**.

S: a) 35; b) 39º22'; c) 0,94, -0,16, 0,31.

14) Siendo los vectores **A**(A_x,5,3) y **B**(B_x,1,0) y sabiendo que **A**-**B**=4**j**+3**k** y que el módulo de su suma vale 9. Determinar A_x y B_x.

S: ±3.

15) Dados los vectores **A**=3**i**-3**j**+2**k** y **B**(3,4,0), calcular:

a) **A**x**B** y **B**x**A**.

b) Área del paralelogramo formado por ambos vectores.

c) Un vector de módulo 3 perpendicular al plano formado por **A** y **B**.

d) (**A**+**B**)x(**A**-**B**).

S:a) (-8,6,21); (8,-6,-21); b) 23,25; c) ±0,13(8,6,21); d) (16,-12,-42).

CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL (PARTÍCULA)

1.1- Parámetros característicos del movimiento.

1.2- Velocidad media. Velocidad instantánea.

1.3- Aceleración media. Aceleración instantánea.

1.4- Componentes intrínsecas de la aceleración.

1.5- Clasificación de los mov. según las componentes a_t y a_n

La cinemática es una rama de la mecánica que se ocupa de estudiar el movimiento de los cuerpos independientemente de las causas que lo producen.

Estudiar el movimiento de un cuerpo es obtener sus ecuaciones de movimiento {**r**(t); **v**(t); **a**(t)}.

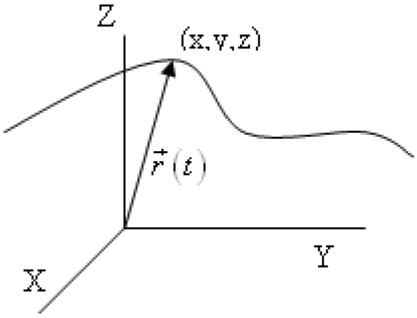
En este capítulo trataremos de conseguir el objetivo anterior y para ello hemos de introducir una serie de conceptos y nuevas magnitudes que nos ayuden a obtener dicho logro.

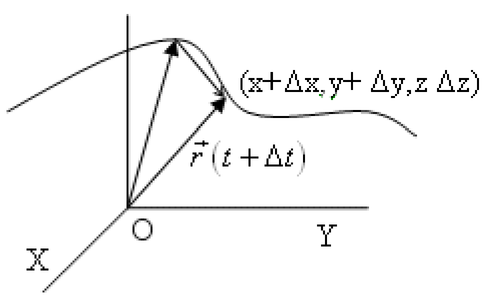
1.1 *Parámetros característicos del movimiento.*

Definamos ahora que se entiende por movimiento de un cuerpo.Un *cuerpo* se *mueve* si su *posición* varía respecto de un *sistema de referencia* que consideramos fijo. Luego antes de cualquier estudio es preciso elegir un sistema de referencia (observador) respecto del cual se estudiará el movimiento. El sistema de referencia que utilizaremos será el de coordenadas cartesianas.

En el capítulo anterior vimos como se localizaba la posición de un punto en el espacio. Localizar un cuerpo en el espacio es algo más complicado, pero en determinadas situaciones se puede prescindir de las dimensiones del cuerpo y estudiar su movimiento como si de un punto (*punto material*) se tratara. Sólo nos ocuparemos aquí de aquellos movimientos en los que se puede hacer esta consideración (*aproximación del punto material*).

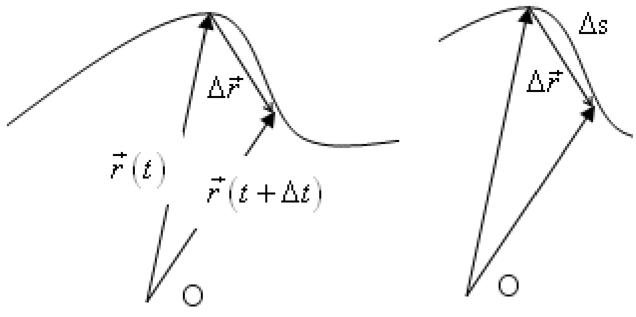
Así pues, al vector que localiza la posición de un punto material en el espacio se denomina *vector de posición* **r**(t), si el punto material se mueve éste cambia de posición (p.e. **r**(t)=2t**i**+t^2j m). A la línea descrita por el extremo del vector de posición en el transcurso del tiempo se denomina *trayectoria*.





¿Cuál sería el desplazamiento experimentado por una partícula, cuya posición es la dada en el ejemplo anterior, en el intervalo entre 2s y 4s. Y si el intervalo lo tomamos entre 1s y 3s?...

Al vector que une posiciones de un punto material se llama *vector desplazamiento* $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}\left(t+\Delta t\right) - \vec{r}\left(t\right)$ (desplazamiento). El camino recorrido por la partícula (pm) desde 1 hasta 2 se denomina arco de curva Δs. Debemos observar que el espacio que recorre la partícula no coincide, en general, con el módulo del vector desplazamiento. Sólo coincidirían si se tratase de un movimiento recto en un sólo sentido.



1.2 *Velocidad media. Velocidad instantánea.*

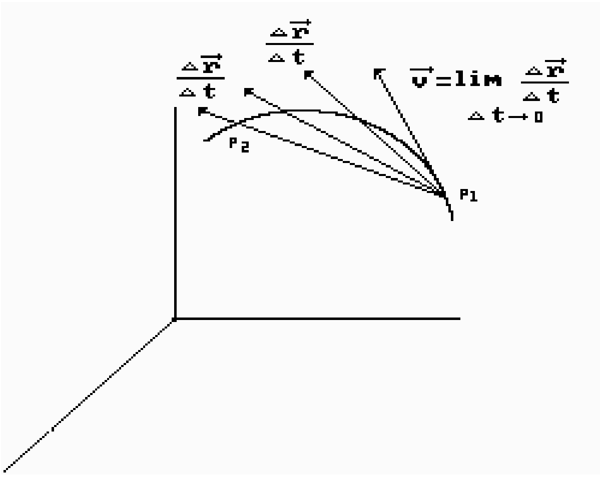
¿Cuál es la velocidad media de la partícula a la que se refiere el ejemplo entre los instantes 2s y 4s?, *¿y entre los instantes 1s y 3s*?...

Se denomina velocidad media de una partícula (pm) al cociente entre un desplazamiento y el tiempo empleado en obtener dicho desplazamiento $\mathbf{v}_m = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$. Debemos hacer notar que ésta no corresponde, en general, a la velocidad que tiene el punto material cuando pasa por una posición determinada.

¿Qué velocidades tiene la partícula en los instantes 1s, 2s, 3s y 4s?...

Si quisiéramos saber la velocidad de la partícula en un instante determinado (p.e. en la posición 1) habría que escoger un intervalo de tiempo de lo más pequeño que se pudiera de manera que la posición 2 se acercase tanto a la posición 1 que no se pudieran distinguir, es decir, lo que en matemáticas se llama hallar el limite del cociente incremental haciendo tender Δt a cero,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (0.11)$$



En este proceso se observa como la secante que contiene al vector $\Delta\mathbf{r}/\Delta t = \mathbf{v}_m$, en el límite se vuelve tangente. Debemos concluir que la velocidad es un vector tangente a la trayectoria en la posición que se considere y sentido el del movimiento, siendo sus componentes las derivadas con el tiempo de las componentes respectivas del vector de posición.

Finalmente comentar que la velocidad es una magnitud vectorial que mide los cambios de la posición con el tiempo.

Su ecuación de dimensiones es $|v|=|L|\cdot|T|^{-1}$ y su unidad en el Sistema Internacional S.I. es el m/s.

1.3 *Aceleración media. Aceleración instantánea.*

¿Cuál será la aceleración media de la partícula que nos ocupa en el intervalo 2s, 4s?, *¿y en el intervalo 1s, 3s*?...

Se denomina aceleración media de una partícula al cociente entre un incremento de la velocidad y el tiempo transcurrido en obtener dicha variación $\mathbf{a}_m=\Delta\mathbf{v}/\Delta t$.

¿Determinar las aceleraciones de la partícula en los instantes 1s, 2s, 3s y 4s?...

Al igual que hacíamos para la velocidad si lo que pretendo es saber cuál es la aceleración de la partícula en una posición determinada (en un instante de tiempo) tendré que estudiar la derivada de la velocidad con el tiempo Así $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ (0.12)

pues, la aceleración se ocupa de medir los *cambios* de la velocidad con respecto al tiempo.

Si una partícula experimenta sólo cambios en el módulo de su velocidad, ¿posee aceleración?;... si por el contrario sólo sufre cambios en la dirección de su velocidad, ¿posee ahora aceleración?

Debemos tener presente que estos cambios pueden ser debidos tanto a variaciones del módulo de la velocidad como a variaciones en su dirección. Más adelante veremos la manera de separar ambos estudios (variaciones en el módulo y variaciones en la dirección de la velocidad).

Su ecuación de dimensiones es: $|a| = |L| \cdot |T|^{-2}$ y se mide en m/s2 en el SI.

Ya hemos definido los vectores posición **r**(t), velocidad **v**(t) y aceleración **a**(t) y la relación entre ellos. Estamos ahora pues, en disposición de hacer el estudio del movimiento de una partícula, es decir, de obtener las ecuaciones de su movimiento {**r**(t); **v**(t); **a**(t)}.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{comp. x de la posición} \equiv x(t) \\ \\ \text{comp. y de la posición} \equiv y(t) \\ \\ \text{comp. z de la posición} \equiv z(t) \end{array}\right\} ; \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\,\vec{k}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{comp. x de la velocidad} \equiv v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} \\ \\ \text{comp. y de la velocidad} \equiv v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} \\ \\ \text{comp. z de la velocidad} \equiv v_z(t) = \dfrac{dz}{dt} \end{array}\right\} ; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j} + a_z(t)\,\vec{k} \left\{\begin{array}{l} \text{comp. x de la aceleración} \equiv a_x(t) = \dfrac{d\,v_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) \\ \\ \text{comp. y de la aceleración} \equiv a_y(t) = \dfrac{d\,v_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) \\ \\ \text{comp. z de la aceleración} \equiv a_z(t) = \dfrac{d\,v_z}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dz}{dt}\right) \end{array}\right\}$$

Acabamos de ver las ecuaciones vectoriales del movimiento respecto de un sistema de referencia cartesiano.

En cinemática se nos presentan dos tipos de problemas:

a) Dada la posición **r**(t) obtener la velocidad **v**(t) y la aceleración **a**(t). Problema inverso
b) Dada la aceleración **a**(t) obtener la velocidad **v**(t) y la posición **r**(t). Problema directo

El primer problema se resuelve a través de la derivación con el tiempo

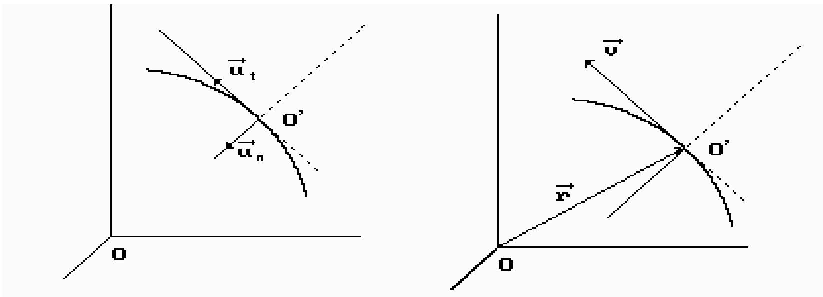
$$\underline{\vec{r}(t)} \rightarrow \frac{d\left(\vec{r}(t)\right)}{dt} \leftrightarrow \underline{\vec{v}(t)} \rightarrow \frac{d\left(\vec{v}(t)\right)}{dt} \leftrightarrow \underline{\vec{a}(t)}\text{. Este es nuestro objetivo.}$$

El problema inverso se resuelve a través de la integración, operación inversa de la derivación,

$$\underline{\vec{a}(t)} \rightarrow \int \vec{a}(t)\cdot dt \leftrightarrow \underline{\vec{v}(t)} + \overrightarrow{cte} \rightarrow \int \vec{v}(t)\cdot dt \leftrightarrow \underline{\vec{r}(t)} + \overrightarrow{cte} \text{ Este es el objetivo siguiente.}$$

1.4 *Componentes intrínsecas de la aceleración.*

Resulta en ocasiones conveniente estudiar el movimiento respecto de un sistema de referencia localizado en la partícula, de tal manera



que uno de sus ejes sea tangente en todo momento a la trayectoria (coincidente en dirección con la velocidad) cuyo semieje + viene definido por ut (vector unitario tangente) y otro perpendicular y en el que el semieje positivo está dirigido hacia el centro de curvatura. Este viene definido por un (vector unitario normal).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}, \quad \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{módulo} \equiv \dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s} = 1 \\ \\ direcc.tang.tray. \\ \\ sent.el\ del\ mov. \end{array} \right\} \equiv \vec{u}_t$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_t \rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{ds}{dt} \\ \vec{v} = v\vec{u}_t \end{cases} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\dfrac{d\vec{u}_t}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_t + \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_n \end{pmatrix} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n \begin{pmatrix} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \\ a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \end{pmatrix} \quad (0.13)$$

Nótese que el valor de la velocidad bien puede determinarse en función de sus componentes cartesianas, o bien a través de ds/dt si se conoce la expresión del arco recorrido en función del tiempo [s(t)]. $|v|= (v_x^2+v_y^2+v_z^2)^{1/2}$; $|v|=ds/dt$

Ya tenemos la aceleración expresada en función de sus componentes cartesianas $a(a_x,a_y,a_z)$ y en función de sus componentes intrínsecas $a(a_t,a_n)$. La gran utilidad de expresar la aceleración en función de estas últimas estriba en la posibilidad de estudiar por separado los cambios del módulo de la velocidad (a_t=dv/dt) de los cambios de la dirección de la velocidad ($a_n=v^2/R$).

1.5 *Clasificación de los mov. según las componentes a_t y a_n.*

Atendiendo a estas componentes podemos decir que los movimientos rectos no tendrán aceleración normal ya que en ellos no se producen cambios en la dirección de la velocidad y los movimientos curvos tienen, al menos, aceleración normal ya que en estos necesariamente hay cambios en la dirección de la velocidad.

Dentro de los movimientos rectos podemos distinguir aquellos donde no se producen cambios en el módulo de la velocidad (a_t es nula) movimientos uniformes y aquellos donde si se producen cambios en el módulo de la velocidad...

Dentro de los movimientos curvos haremos especial hincapié en los movimientos circulares, radio de curvatura constante (R=cte.). También aquí podemos hablar de dos posibilidades, que a_t sea nula (módulo de la velocidad no varía -cte.-) o bien que a_t sea distinta de cero.

$$\begin{pmatrix} a_n = 0 \\ \\ a_t = 0 \end{pmatrix} MRU\ ;\ \begin{pmatrix} a_n = 0 \\ \\ a_t = cte \end{pmatrix} MRUV\ ;\ \begin{pmatrix} a_n = 0 \\ \\ a_t \neq cte \end{pmatrix} MRV\ ;\ \begin{pmatrix} a_n = cte \\ \\ a_t = 0 \end{pmatrix} MCU\ ;\ \begin{pmatrix} a_n \neq cte \\ \\ a_t = cte \end{pmatrix} MCUV$$

Estos son algunos de los movimientos que serán estudiados a lo largo del bloque.

Puede resultar conveniente expresar el arco de curva "s" en función del ángulo "θ" y el radio de curvatura con el que se traza dicho arco. Recordando la definición de radián...

$$s = R\cdot\theta\,;\frac{ds}{dt}=\frac{d\left(R\ \theta\right)}{dt}(\text{ en M.C. R} = \text{cte}),\ \frac{ds}{dt}=\text{R}\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix}\frac{ds}{dt}=v\\ \frac{d\theta}{dt}=\omega\end{pmatrix}\rightarrow \underline{v=R\ \omega}$$

L

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d\left(R\ \omega\right)}{dt}=R\cdot\frac{d\omega}{dt}\begin{pmatrix}\frac{dv}{dt}=a_t\\ \frac{d\omega}{dt}=\alpha\end{pmatrix}\rightarrow \underline{a_t=R\ \alpha}\left(s=R\ \theta;\ v=R\ \omega; a_t=R\ \alpha;\ a_n=R\ \omega^2\ \right) \quad (0.14)$$

uego si el ángulo está expresado en radianes las relaciones entre las magnitudes lineales y las correspondientes angulares son las descritas arriba...

Cuestiones y problemas. Cinemática.

1) La posición de una partícula varía con el tiempo según $\mathbf{r}=(4t+2)\mathbf{i}$ expresada en SI. Calcular la velocidad media en los intervalos 1s y 3s, y 2s y 4s. ¿Qué tipo de movimiento es?.

2) La posición de una partícula viene dada por $\mathbf{r}=(3t^2+1)\mathbf{i}$ en el SI. Calcular:
   a) La velocidad en cualquier instante.
   b) La velocidad en los instantes t=2s y t=5s.

3) Una partícula se mueve con una velocidad $\mathbf{v}=(2t-1)\mathbf{j}$ m/s. Determinar la aceleración media entre los instantes 1s y 3s y entre los instantes 2s y 4s.

4) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (componentes cartesianas en función de t de la posición) de una partícula son $x=t^2+2$; $y=2t^2-1$ donde x e y están dados en m y t está en s. Calcular:
   a) La velocidad instantánea.
   b) La aceleración media en los intervalos 1s y 3s, y 2s y 4s
   c) La aceleración instantánea.

5) Las componentes cartesianas de la posición de una partícula son $x=4\cos(\pi/4\ t)$; $y=4\mathrm{sen}(\pi/4\ t)$. Determinar:
   a) Posiciones en los instantes 0s, 2s, 4s y 6s.
   b) Ecuaciones del movimiento **r**(t), **v**(t) y **a**(t).
   c) Desplazamiento en el intervalo 0s→8s.
   d) Ecuación cartesiana [y=f(x)] de la trayectoria.
   e) Valor de la velocidad en cualquier instante.
   f) Período del movimiento y espacio recorrido en ese tiempo.

5-b) Las componentes cartesianas de la posición de una partícula son $x=t-2$; $y=(t-2)^2$. Determinar:
   a) Posiciones en los instantes 0s, 2s y 4s.
   b) Ecuaciones del movimiento **r**(t), **v**(t) y **a**(t).
   c) Desplazamiento en el intervalo 0s→4s.
   d) Ecuación cartesiana [y=f(x)] de la trayectoria.

e) Valor de la velocidad en cualquier instante.

6) Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio 40cm, de tal manera que su desplazamiento angular viene dado por $\theta=2t+t^2/2$ rad. Calcular:
   a) ω y v en cualquier instante.
   b) α y a_t en cualquier instante.
   c) a_n para t=2s.
   d) Valor de la aceleración total en el instante t=2s.

7) Se lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 40m/s. Calcular:
   a) La altura a que se encuentra 2 y 6 segundos después.
   b) La máxima altura que alcanza.
   c) La velocidad que tiene cuando se encuentra a 50m del suelo.
   e) La velocidad con que impacta de nuevo en el suelo.

8) Se suelta una bomba desde un avión de bombardeo que vuela a una altura de 4000m con una velocidad horizontal de 900km/h. Calcular:
   a) El tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.
   b) La velocidad con que llega al suelo.
   c) La posición de la bomba 10s después de ser soltada.
   d) El alcance horizontal de la bomba en el momento del impacto.

9) Un jugador de golf lanza una pelota desde el suelo con un ángulo de elevación de 60º con respecto a la horizontal y con una velocidad de 60m/s. Calcular:
   a) La velocidad de la pelota en el punto más alto de la trayectoria.
   b) La altura máxima alcanzada.
   c) El alcance horizontal máximo.
   d) El alcance obtenido para un ángulo de 30º.